# NUOVI ELEMENTI

## DI ARIMMETICA

*DI*

NICCOLO' DE MARTINO,

*Ristampati per uso della R. Accademia*

DEL BATTAGLIONE

R. FERDINANDO,

*Coll' Aggiunta della dottrina delle ragioni e delle proporzioni; e de' Problemi, che col calcolo Aritmetico si risolvono.*

*DI*


CARLO NOVI,

*Capitano graduato nel Corpo Generale della R. Artiglieria, e Professore di Matematica nella suddetta R. Accademia.*


IN NAPOLI MDCCLXXV.

# INDICE

## De' Capitoli, e de' Paragrafi.

INtroduzione. pag. 1
CAPITOLO I. *Dell'Algorismo de' numeri interi.* 8
§. I. *Della numerazione de' numeri interi.* 9
§. II. *Dell'Addizione de' numeri interi.* 16
§. III. *Della Sottrazione de' numeri interi.* 23
§. IV. *Della Moltiplicazione de' numeri interi.* 30
§. V. *Della Divisione de' numeri interi.* 39
CAPITOLO II. *Dell'Algorismo de' numeri rotti.* 51
§. I. *Della nozione de' rotti, e delle loro riduzioni.* 52
§. II. *Dell'Addizione, e sottrazione de' rotti.* 62
§. III. *Della Moltiplicazione, e Divisione de' rotti.* 70
§. IV. *De' Rotti de' rotti, e del loro Algorismo.* 79
§. V. *De' Rotti decimali, e del loro Algorismo.* 88
CAPITOLO III. *Delle Potenze, e Radici de' numeri.* 99
§. I. *Della Composizione del quadrato.* 100
§. II. *Dell'Estrazione della Radice quadrata.* 110
§. III. *Della Composizione del cubo.* 121
§. IV. *Dell'Estrazione della Radice cubica.* 132
CAPITOLO IV. *Della Ragione, e della Proporzione.* 142
CAPITOLO V. *De' Problemi, che col calcolo Aritmetico si risolvono.* 156
§. I. *Della Regola di proporzione semplice, diretta, e reciproca.* 157
§. II. *Della Regola di proporzione composta, diretta, e reciproca.* 161
§. III. *Della Regola di Società semplice, e composta.* 169
§. IV. *Della Regola di Allegazione.* 179
§. V. *Della Regola semplice del Falso.* 194
§. VI. *Della Regola doppia del Falso.* 196

ELE-

# ELEMENTI DELL' ARIMMETICA.

## *INTRODUZIONE.*

1. Ssendo noſtro intendimento di diſtendere un Corſo matematico per coloro, che non ſolo col valore, ma eziandio colla ſcienza deſiderano diſtinguerſi nel nobile meſtiere delle armi; daremo a quello principio con iſpiegare in primo luogo gli Elementi dell' Arimmetica. Ma perchè più diſtintamente poſſa intenderſi, qual ſia l'objetto di eſſa, noteremo primieramente, che ſiccome tutte le ſcienze matematiche ſi aggirano intorno alla quantità; così appellaſi con tal nome tutto ciò, che è capace di aumento, e di diminuzione.

2. Secondo queſta nozione della quantità egli è chiaro, che non una, ma varie eſſer debbano le ſue ſpezie; poichè moltiſſime ſono quelle coſe, che ritroviamo poterſi di lor natura aumentare, e diminuire. Ma di qualſivoglia ſpezie ella ſia, chiara coſa ancora ſi è, non poterſi di eſſa formare idea, ſenza concepirla fornita di parti; per la ragione, che così l'aumento, come la diminuzione, che può ricevere, dee riguardarſi come porzione della ſteſſa quantità.

3. Or la prima, e principal ſpezie della quantità ſi è l'eſtenſione, dotata dalla natura di tre dimenſioni, cioè di lunghezza, larghezza, e profondità. Ella appellaſi comunemente quantità continua; poichè colla diviſione di eſſa non poten-

dosi giungere a parti, che siano affatto indivisibili, conviene riguardarla, non già come nata dall' accoppiamento di parti, che state fussero antecedentemente separate fra loro, ma come un tutto continuato, in cui risultano le parti per mezzo della divisione medesima.

4. Quindi, a differenza di essa, chiara cosa si è, potersi della quantità distinguere un' altra spezie, cioè, che sia composta di parti fra essoloro disgiunte, e separate. Ma siccome quest' altra spezie, attesa la sua indole, dovrà dirsi quantità discreta; così per essere le sue parti sempre numerabili, si è dato ancora alla medesima il nome di numero. Onde l' estensione, ed il numero debbono riguardarsi come spezie della quantità interamente opposte tra loro.

5. L' esame di queste due spezie della quantità ci ha somministrato due scienze particolari, cioè la Geometria, e l' Arimmetica. Imperocchè siccome la Geometria è nata dalle considerazioni fatte intorno all' estensione; così per lo contrario dalle riflessioni formate intorno al numero è derivata l' Arimmetica. E perciò l' estensione dee aversi come objetto della Geometria, ed il numero come objetto dell' Arimmetica.

6. Intanto queste due scienze considerano la quantità, intorno alle quali si aggirano, spogliate da ogni affezione, che cada sotto i nostri sensi; e per questa ragione si riguardano come parti della Matematica, che chiamasi pura. Ma poichè le qualità sensibili, che insieme coll' estensione risiedono ne' corpi, similmente debbono aversi come altrettante spezie della quantità; ancora intorno ad esse si sono formate scienze particolari, le quali tuttavolta si riferiscono alla Matematica, che chiamasi mista.

7. Ed in vero sono derivate quest' altre scienze dall' applicazione, che si è fatta delle verità geometriche, ed arimmetiche alle qualità sensibili de' corpi; e quindi si è, che le medesime sono state dinominate ancora scienze fisico-matematiche.

Impe-

Imperocchè, ſiccome la conſiderazione delle qualità ſenſibili propriamente appartiene alla Fiſica; così poſſono riguardarſi le riferite ſcienze, come nate dall' unione della Fiſica colla Matematica.

8. Queſte ſcienze fiſico-matematiche ſono moltiſſime: anzi il loro numero ſi va ſempre più aumentando per l' induſtria de' moderni Matematici, i quali ſi ſtudiano di applicare continuamente a' nuovi argomenti fiſici le verità geometriche, ed arimmetiche. Noi intanto nel Corſo matematico, che dobbiamo diſtendere, ragioneremo a lungo della Geometria, e dell' Arimmetica; ma per quanto ſi appartiene alle ſcienze fiſico-matematiche, ci riſtringeremo a quelle ſole, che ſono neceſſarie per l' arte militare.

9. Del rimanente il carattere della vera ſcienza a niuna dee aſcriverſi con più ſaldo fondamento, quanto a ciaſcheduna delle già riferite; e quindi ſi è, che ſi è dato ad eſſe il nome di Matematiche, per dare a divedere, che le medeſime ſono diſcipline, o ſcienze per eccellenza. In effetto il metodo, che ſi oſſerva in queſte ſcienze, ſi è di ſtabilire prima alcuni principj, che ſiano certi, ed indubitati; indi di dimoſtrare tutte le propoſizioni, che in eſſe ſi avanzano, o con dedurle immediatamente da quei principj, o con far uſo di altre propoſizioni di già dimoſtrate.

10. Ed in primo luogo in queſte ſcienze ſi pone tutto lo ſtudio, perchè ſi abbiano nozioni chiare, e diſtinte delle coſe, delle quali dee trattarſi. Quindi ſi definiſcono minutamente tutte le voci, che debbono eſſere impiegate, ſenza laſciarvi niente di equivoco; e nell' applicazione di eſſe in diſegnare le coſe medeſime ſi cerca di render certa almeno la poſſibilità di tali coſe. Onde ſi è, che sì fatte definizioni debbano per ogni verſo meritare tutto l' aſſenſo, e perciò riguardarſi come principj.

11. Si conſiderano poſcia le conſeguenze, che riſultano immediatamente dalla nozione di ciaſcuna coſa, racchiuſa nella ſua definizione. E poichè

A 2 chè

chè la verità di tali conseguenze si rende a noi nota non già in virtù di qualche ragionamento, ma per picciola riflessione, che si voglia fare intorno alla natura della cosa, di cui si tratta; quindi si è, che ancora esse debbonsi avere come principj, le quali però si distinguono dalle definizioni, con darsi alle medesime il nome d'assiomi.

12. Finalmente se bene per promuovere, e portare innanzi una qualche teoria, debba farsi talvolta uso di alcune supposizioni; nientedimeno sono queste d'indole tale, che non solo non offendono il sentimento comune, ma come molto semplici, di leggieri debbono essere accordate da chicchesia. Sì fatte supposizioni si assumono eziandio come principj, e si appellano comunemente dimande, ovvero postulati; per la ragione, che non sogliono impiegarsi in queste scienze, senza dimandarne prima il permesso.

13. Di questa indole adunque sono i principj di tutte le scienze matematiche. E poichè le proposizioni, che in esse si avanzano, secondo si è detto, debbono dedursi, o immediatamente da quei principj, o pure da altre proposizioni di già dimostrate; chiara cosa si è, che in queste scienze più, che in ogni altra, siano impiegate le leggi del vero metodo. Imperocchè riesce affatto impossibile di concatenare talmente moltissime verità, che l'una derivi dall'altra, se non s'incominci dalle teorie più semplici, ed indi si faccia passaggio all'altre più composte.

14. Le proposizioni intanto di queste scienze non sono tutte di una medesima indole, ma altre sono problemi, ed altre teoremi. Si chiamano problemi quelle proposizioni, che riguardano la pratica, e che c'insegnano in conseguenza a fare qualche cosa. Per lo contrario si dicono teoremi quell' altre proposizioni, che si fermano nella sola contemplazione dell'argomento, di cui si tratta, e che ci additano le varie proprietà, che li competono. Ma non perciò debbono andar disgiunte l' une dall' altre; poichè il più delle volte ancora i teo-

i teoremi, per poterfi dimoftrare, richiedono una qualche operazione, di cui perciò è neceffario prima munirfi.

15. Egli è vero, che preffo i Matematici s'incontrano ancora altre propofizioni, delle quali alcune portano il nome di lemma, ed altre di corollario. Ma quefte fimilmente di lor natura o fono problemi, ovvero teoremi; e foltanto a riguardo di altre propofizioni ricevono tali dinominazioni. Come in effetto chiamafi lemma una propofizione, che viene impiegata unicamente per lo ftabilimento di un' altra; e fi dice corollario ogni propofizione, che ricavafi immediatamente da un' altra di già ftabilita. Onde sì fatti nomi fono relativi, nè poffono certamente darfi ad una propofizione, fenza averfi prefente l' altra, di cui quella è lemma, o corollario.

16. Or fe niente più conferifce a perfezionare la noftra mente, quanto la fcienza; egli è chiaro, che una tal perfezione debbafi più giuftamente ricavare dalle Matematiche, che fono le vere fcienze. Ma lo ftudio di effe contribuifce ancora moltiffimo, sì per eftendere più oltre le conofcenze fifiche, ed inveftigare a fondo le forze della natura; come per promuovere le arti, che fono neceffarie alla vita umana. E poichè l' arte militare, cotanto profittevole per la confervazione, e l' ingrandimento degli Stati, eziandio da quelle dipende; perciò il noftro principal affunto fi è di agevolare l' intelligenza delle medefime a' Giovani militari.

17. Quindi fe bene il coftume de' Matematici fia di diftinguere con proprj titoli, così i principj delle loro fcienze, come le propofizioni, che ne ricavano; nientedimeno per meglio confeguire il fine propoftoci, ftimiamo più acconcio di ridurre le varie teorie di ciafcuna fcienza a certi capi generali, e di andar divifando con difcorfo continuato quel tanto a ciafcuna di effe fi appartiene. Nè perciò faremo meno offervanti di quel rigore, ch' è proprio di quefte fcienze; ma foltanto

tanto ci prenderemo questa libertà per ligare più strettamente insieme le verità, che in esse si dimostrano, e per imprimerle davantaggio nell' animo di coloro, che debbono apprenderle.

18. Incominceremo adunque il nostro Corso da quella scienza, che chiamasi Arimmetica, sì per essere di sua natura molto più semplice, come ancora, perchè senza l' anticipata sua conoscenza non possono ridursi in pratica le verità della Geometria. E poichè lo studio di questa scienza dee raggirarsi spezialmente intorno alle operazioni, che in essa s' insegnano; perciò la racchiuderemo in due libri, ed in uno di essi tratteremo delle operazioni più semplici dell' Arimmetica, e nell' altro delle operazioni più composte, senza però tralasciare di rendere le vere ragioni, così delle une, come delle altre operazioni.

## LIBRO I.

### *Delle Operazioni più semplici dell' Arimmetica.*

19. SIccome il numero è l' objetto dell' Arimmetica, così egli si genera con ripetere spesse fiate l' unità, la quale perciò si riguarda come suo principio. Ed in vero l' unità presa una volta restituisce se medesima, e forma l' uno; ma ella stessa ne darà il due con ripetersi due volte, ne darà il tre con ripetersi tre volte, e così degli altri. E poichè questa reiterata posizione dell' unità può andare all' infinito, infiniti altresì saranno i numeri, che in cotal guisa potranno generarsi l' uno dopo l' altro.

20. Egli è vero, che tutti questi numeri anno il loro essere nelle pure idee della nostra mente; ma non è da negarsi, che le loro nozioni si possono acquistare colla contemplazione stessa delle cose, che esistono. Imperocchè, siccome quando fissiamo lo sguardo ad una sola cosa, si desta in noi l' idea dell' uno; così avremo quella del due, quando nel medesimo tempo riflettiamo a due cose;

cose; avremo quella del tre, quando tre cose insieme a noi si presentano; e così all' infinito.

21. Intanto questi numeri, che nascono in noi con contemplare insieme due, o più delle cose esistenti, si debbono in qualche maniera depurare, affinchè possano aversi come vero objetto dell' Arimmetica. Consiste questo loro depuramento nel doversi i medesimi astrarre talmente dalle cose stesse, che non vi rimanga alcuno loro vestigio; anzi che atti siano a rappresentarci qualunque altra ugual moltitudine di cose, che siano della stessa spezie, ed eguali eziandio tra loro. E ciò per la ragione, che i numeri, li quali si considerano nell' Arimmetica, sono formati con unità omogenee, ed eguali.

22. Ed in vero, se i numeri, che si pongono a calcolo nell' Arimmetica, generansi colla reiterata posizione dell' unità (19); chiara cosa si è, che siccome questa non mai varia, ma rimane sempre la stessa, così i numeri medesimi debbano essere composti di unità omogenee, ed eguali tra loro. E per questo verso i numeri dell' Arimmetica debbono riputarsi come alquanto differenti da coloro, che ordinariamente s' impiegano; poichè in questi le unità possono essere non solo disuguali, ma di spezie ancora diversa.

23. Quindi giova l' avvertire, che le proprietà, le quali si dimostrano nell' Arimmetica intorno a' numeri, non ad altro principio si appoggiano, se non se alla supposizione di essere omogenee, ed eguali tra loro le unità, che compongono detti numeri. Anzi, se si voglia attentamente riflettere, derivano tali proprietà, non tanto dalle astratte nozioni, che abbiamo de' medesimi numeri, quanto dall' omogeneità, ed uguaglianza delle cose, che debbono esserci sempre rappresentate dalle loro unità.

24. Or se bene questi numeri, che nascono dalla continua ripetizione dell' unità, di lor natura vadano all' infinito (19); non dobbiamo intanto darci a credere, che da essi sia assorbita tutta la

serie de' numeri possibili ; poichè per mezzo delle operazioni, che intorno a' medesimi possono istituirsi ; vedremo nascere altri numeri , non solo in maggior copia delli già riferiti , ma d' indole ancora diversa . Chiameremo intanto numeri interi quelli , che per ora abbiamo definiti ; e daremo principio a questa scienza colla loro considerazione , che dee essere il fondamento dell' altre teorie .

## CAPITOLO I.

### *Dell' Algorismo de' numeri interi.*

25. SIccome è proprio di ogni quantità il potersi aumentare , e diminuire ; così le più semplici operazioni , che possono istituirsi intorno a' numeri , riguardano o il loro aumento , o la loro diminuzione . Queste operazioni sono quattro , cioè l' addizione , la sottrazione , la moltiplicazione , e la divisione ; le quali insieme si appellano comunemente col nome di Algorismo . Ma prima di far vedere , come a riguardo de' numeri interi debbano farsi le riferite operazioni , uopo è , che si spieghi minutamente l' artifizio tenuto dagli Arimmetici nell' ordinare , e computare i medesimi numeri .

26. Ed in vero l' infinita mole , che abbiamo de' numeri interi , ha dato motivo agli Arimmetici di pensare ad un metodo , con cui compendiosamente , e senza confusione si potessero tutti registrare , e distinguere fra loro . L' operazione , che insegna a ciò fare , dicesi numerazione , dalla quale propriamente apprendiamo tre cose ; cioè prima ad enunciare con poche voci tutti i numeri interi possibili ; in secondo luogo ad esprimere , e rappresentare i medesimi numeri eziandio con pochi caratteri ; e finalmente a profferire colle dovute voci qualsivoglia numero intero , che vedesi espresso , e disegnato con tali caratteri .

§. I.

## §. I.

*Della Numerazione de' numeri interi.*

27. TUtti i numeri interi possibili vengono distinti, e registrati dagli Arimmetici per via di diecine, delle quali siccome la prima incomincia dall'unità, che è principio di ogni numero, così ciascuna di esse racchiude dieci numeri consecutivi. I numeri intanto, per cui si terminano le prime dieci decine, si chiamano dieci, venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, novanta, cento. E conforme gli altri nove della prima diconsi uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove; così si dinominano gli altri nove di ciascuna dell' altre, con aggiungere quelle stesse voci al nome del numero, per cui si termina la diecina precedente.

28. Per ragion di esempio, la prima diecina si termina al dieci; onde i primi nove numeri della seconda diconsi undici, dodici, tredici, quattordici, quindici, sedici, diciassette, diciotto, diciannove. Similmente questa seconda diecina si termina al venti; onde i primi nove numeri della terza diconsi ventuno, ventidue, ventitre, ventiquattro, venticinque, ventisei, ventisette, ventotto, ventinove. E così ancora terminandosi questa terza diecina al trenta; dovranno dirsi trentuno, trentadue, trentatre, trentaquattro, trentacinque, trentasei, trentasette, trentotto, trentanove i primi nove numeri della quarta.

29. Or dopo essersi giunto al cento, più speditamente si passa più oltre per via di centinaja, che sono diecine di diecine. E siccome il primo centinajo ha per suo termine il cento, così il secondo si termina al dugento, il terzo al trecento, il quarto al quattrocento, il quinto al cinquecento, il sesto al seicento, il settimo al settecento, l'ottavo all' ottocento, il nono al novecento, ed il decimo al mille. E per quanto agli altri numeri di ogni altro centinajo, essi vengono dinominati

con

con aggiungere al numero, che è termine del centinajo precedente, quegli stessi, che sono contenuti nel primo centinajo.

30. Dal mille poi con maggior speditezza si passa più innanzi per via di migliaja, che sono diecine di centinaja; distinguendosi prima le migliaja medesime, che si terminano al mille, dumila, tremila, quattromila, cinquemila, seimila, settemila, ottomila, novemila, e diecimila; indi le diecine di migliaja, che si terminano al diecimila, ventimila, trentamila, quarantamila, cinquantamila, sessantamila, settantamila, ottantamila, novantamila, e centomila; e finalmente le centinaja di migliaja, che si terminano a centomila, dugentomila, trecentomila, quattrocentomila, cinquecentomila, seicentomila, settecentomila, ottocentomila, novecentomila, ed un milione.

31. Il milione adunque vale lo stesso, che dieci centomila, o pure millemila; ma ottenuto il milione, più speditamente ancora si va innanzi per via degli stessi milioni, contando col medesimo artificio non solo li milioni semplici, ma eziandio le loro diecine, le loro centinaja, le loro migliaja, le diecine delle loro migliaja, le centinaja delle stesse migliaja, ed il milione de' medesimi, che chiamasi bilione. Alla perfine sempre collo stesso metodo si passerà dal bilione al milione de' bilioni, che dicesi trilione; dal trilione al milione de' trilioni, che si appella quadrilione; e così all' infinito. Onde con sì fatto artificio, per mezzo di pochissime voci, resteranno dinominati tutti i numeri interi possibili.

32. Essendo tale l' artificio tenuto dagli Arimmetici nel dinominare tutti i numeri interi possibili; egli è chiaro doversi quelli distinguere in tante classi, delle quali la prima vada dall' uno persino al milione, la seconda dal milione persino al bilione, la terza dal bilione persino al trilione, e così dell' altre; onde la prima si dirà essere classe dell' unità, la seconda classe de' milioni, la terza classe de' bilioni, e così delle rimanenti.

Ma

Ma chiara cosa eziandio si è, che i numeri di ciascuna classe debbano essere distinti ancora in sei ordini, cosicchè il primo sia de' semplici numeri, che danno nome alla classe, il secondo delle loro diecine, il terzo delle loro centinaja, il quarto delle loro migliaja, il quinto delle diecine delle loro migliaja, ed il sesto finalmente delle centinaja delle stesse migliaja.

33. Conforme coll' anzidetto artificio è riuscito agli Arimmetici di dinominare per mezzo di pochissime voci tutti i numeri interi possibili; così si sono studiati altresì di scriverli, e rappresentarli con pochissimi caratteri, che in tutto sono dieci, cioè 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Di questi il primo o niente significa da per se solo, e comunemente chiamasi zero. Per quanto poi agli altri nove 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, si sono dati ad essi due valori; cioè uno semplice, che ritengono, qualora si scrivono separatamente, ed in virtù del quale significano uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, che sono i primi nove numeri della prima diecina; e l' altro locale, che acquistano, quantevolte si accoppiano insieme, e del quale dee giudicarsi per ragione del luogo e che occupano nel loro accoppiamento.

34. Quindi conviene sapere, che siccome si è convenuto presso gli Arimmetici, che il computo di tutti i numeri interi possibili dovesse farsi per via di diecine; così si è stabilito ancora da medesimi, che il valore locale delli riferiti nove caratteri si andasse aumentando sempre nel decuplo. Nel primo luogo adunque ci additano i loro valori semplici, li quali, secondo si è detto, sono uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove; ma trasportati nel secondo luogo significano il decuplo di detti valori, cioè dieci, venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, novanta; e posti inoltre nel terzo dinotano il decuplo di ciò, che significavano nel secondo, cioè cento, dugento, trecento, quattrocento, cinquecento, seicento, settecento, ottocen-

cento, novecento; e così all'infinito.

35. Essendo così, egli è facile ad intendersi, con qual'ordine debbonsi andar registrando le classi de' numeri, che sono state distinte di sopra (32); e si è, che la prima dell'unità debba incominciare dal primo luogo, la seconda de' milioni dal settimo, la terza de' bilioni dal decimoterzo, la quarta de' trilioni dal decimonono, e così dell'altre, tantocchè per ciascuna classe debbono esservi sei luoghi. Ma chiara cosa ancora si è, che nel primo di questi sei luoghi debbonsi riporre i semplici numeri, che danno nome alla classe, nel secondo le loro diecine, nel terzo le loro centinaja, nel quarto le loro migliaja, nel quinto le diecine delle loro migliaja, e nel sesto ed ultimo le centinaja delle stesse migliaja.

36. Vogliasi per ragion di esempio esprimere con caratteri il numero tremila cinquecento settantanove, che appartiene alla prima classe. Considerando separatamente le sue parti, ritroveremo, che egli contiene nove unità, sette diecine, cinque centinaja, e tre migliaja. Quindi i caratteri da impiegarsi nella sua espressione saranno 9, 7, 5, 3; ma dovrà porsi il 9 nel primo luogo per additarci unità semplici, il sette nel secondo per essere indice delle diecine, il 5 nel terzo perchè dinota le centinaja, ed il 3 nel quarto perchè disegna le migliaja; con che il numero proposto resterà espresso nella maniera seguente 3579. E così ancora, dovendosi esprimere il numero settecento trentaquattro mila, cinquecento novantadue, che similmente appartiene alla prima classe, la sua espressione sarà 734592.

37. Vogliasi inoltre esprimere il numero trecento cinquantasette milioni, novecento quarantaseimila trecento cinquantadue, che non solo appartiene alla prima classe, ma si estende ancora alla seconda. Considerasi primieramente quella porzione di esso, che si rapporta alla prima classe; ed essendo detta porzione novecento quarantaseimila trecento cinquantadue, egli è chiaro, che la sua espres-

espressione debba essere 946352. Considerasi poscia l'altra porzione, che si riferisce alla seconda classe; ed essendo quest' altra porzione trecento cinquantasette milioni; chiara cosa si è, che per essa debbono impiegarsi tre altri caratteri, cioè il 7 per disegnare i sette milioni, il 5 per additare le cinque loro diecine, ed il 3 per dinotare le tre loro centinaja. Onde scrivendo questi altri tre caratteri nel settimo, ottavo, e nono luogo, sarà 357946352 l'intera espressione del numero proposto.

37. E quindi ora s'intenderà facilmente, qual debba essere l'uso del zero nell'espressione de' numeri, e si è di riempiere quei luoghi, che talvolta restano vacui. Così il numero trecento e sette costa di sette unità, e di tre centinaja; onde per la sua espressione dee situarsi il 7 nel primo luogo, ed il 3 nel terzo; e poichè il secondo luogo rimane vacuo, perciò si riempie quello col zero, e l'espressione del numero sarà 307. Similmente il numero tre milioni, cinque mila e nove non racchiude altra cosa, se non che nove unità, cinque migliaja, e tre milioni; onde per esso è necessario servirsi del 9 posto nel primo luogo, del 5 situato nel quarto, e del 3 collocato nel settimo; ma restando vuoti tutti gli altri luoghi di mezzo, si riempieranno quelli con altrettanti zeri, e sarà 3005009 l'espressione del numero.

39. Ed essendo così, egli è chiaro, che se bene il zero niente significhi da se solo, tuttavolta accoppiato con altri caratteri, ha possanza di aumentare il loro valore, e di rendersi in qualche modo ancora esso significativo. Così il 3 non vale altro, che tre; ma significa trenta coll' unione di un zero solo, trecento coll' unione di due zeri, tremila coll' unione di tre zeri, e così all' infinito. Ma affinchè possa il zero produrre un tal' effetto, dee egli sempre precedere al carattere significativo. E la ragione si è, perchè con porsi così innanzi a quel carattere, lo trasporta ad un luogo superiore, ed in conseguenza gli aumenta il suo valore locale. Così, scrivendosi 300, il

3 vie-

3 viene ad occupare il terzo luogo; e perciò significa tre centinaja, ovvero trecento.

40. Finalmente per quanto tocca alla maniera di profferire i numeri, che si ritrovano espressi con caratteri, bastantemente può ella dedursi dalle cose dette fin'ora. Ma per maggior chiarezza noteremo primieramente, che non eccedendo il numero tre caratteri, dee profferirsi il primo di essi per via di unità, il secondo per via di diecine, ed il terzo per via di centinaja; e ciò per lo stabilimento fatto dagli Arimmetici, che ogni carattere debba significare nel primo luogo tante unità, nel secondo luogo tante diecine, e nel terzo luogo tante centinaja. Così il numero 357 si profferirà così, trecento cinquantasette; e quest' altro 596 si profferirà in quest'altra maniera, cinquecento novantasei. Che se poi qualche carattere sia zero, in tal caso ad esso non si darà valore alcuno; così il numero 307 si dirà essere trecento e sette; e quest'altro 590 si dirà essere cinquecento novanta.

41. Noteremo in secondo luogo, che quando un numero eccede tre caratteri, ma non giunge a sette, possono separarsi i tre primi dagli altri rimanenti per mezzo di un qualche segno, come di una virgola, o pure di un punto, e profferirsi tanto gli uni, quanto gli altri, come se fossero soli, con frapporre la voce mille nel luogo della divisione per ligarli insieme. Così il numero 350,907, dopo essersi partito con una virgola nella maniera suddetta, si enuncierà così, trecento cinquantamila, novecento e sette. E similmente il numero 590,070, partito nella stessa guisa, si profferirà così, cinquecento novantamila, e settanta. Locchè dipende parimente dallo stabilimento fatto dagli Arimmetici, cioè che i caratteri posti nel quarto, quinto, e sesto luogo debbano significare unità, diecine, e centinaja di migliaja.

42. Noteremo finalmente, che per ogni altro numero possono dividersi i suoi caratteri da sei in sei con incominciare dal primo, ed indi prof-

fe-

ferirsi separatamente con frapporre le voci di milione, bilione, trilione, &c. ne' luoghi della divisione per ligarli insieme. Così il numero seguente 750,956590, dopo essersi diviso nella maniera esposta, si profferirà così, settecento cinquanta milioni, novecento cinquantasei mila cinquecento novanta. Ed ancora il numero 35,956400,570060, dopo essersi partito nella stessa guisa, si enuncierà così, trentacinque bilioni, novecento cinquantaseimila quattrocento milioni, cinquecento settantamila novecento sessanta. E ciò dipende similmente dallo stabilimento fatto dagli Arimmetici, cioè che il primo senario sia la classe dell' unità, il secondo la classe de' milioni, il terzo la classe de' bilioni, e così degli altri.

43. Del rimanente meritano quì di essere avvertite due cose. La prima si è, che i caratteri, per mezzo de' quali si esprimono i numeri, sono pervenuti a noi dagli Arabi; e quindi si è, che nel distinguere i luoghi, che occupano, si va non già da sinistra a destra, ma tutto al contrario da destra a sinistra; poichè così gli Arabi, come tutti gli altri Orientali un tal metodo tengono nello scrivere. L'altra si è, che siccome il computo de' numeri per via di diecine è stato arbitrario, così egli è molto probabile, che il medesimo sia derivato dalle dieci dita, che abbiamo nelle due mani, alle quali sogliamo ricorrere, quantevolte si tratta di numerare. Ma dall' esser arbitraria tal maniera di computare, chiara cosa si è, che potrebbe sostituirsi altra in vece di essa, in cui si procedesse per altra somma maggiore, o minore della diecina; come in effetto riferisce Aristotele, che vi era nella Tracia un popolo, il quale contava per via de' quaternarj; ed a tempi nostri il celebre Leibiniz esortava i Matematici a far uso dell' Arimmetica de' binarj, la quale da un dotto nostro Amico in Roma minutamente è stata esaminata.

§. II.

### §. II.

*Dell' Addizione de' numeri interi.*

44. SPiegato l'artificio tenuto dagli Arimmetici nel computare, ed esprimere tutti i numeri interi, passeremo ora alle quattro operazioni, per mezzo delle quali i medesimi numeri si aumentano e si minorano, cioè all'addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione. Ed in primo luogo, per quanto all'addizione, chiamasi con tal nome quella operazione, per mezzo di cui due, o più numeri si aggiungono insieme, e si forma di essi una somma sola; onde si è, che colui, il quale esegue una tal operazione, dicesi comunemente aggiungere, ovvero sommare.

45. Quantevolte i numeri interi, che debbonsi unire insieme, non contengono altra cosa, che semplici unità; egli è facile con picciola riflessione, che si voglia fare, d'indagarne la loro somma. Così ognuno vede, che 2, e 3 insieme debbano fare 5; che 4 insieme con 5 debba fare 9; che la somma di 8, e 9 debba essere 17; che quella di 3, 6, e 9 debba essere 18; ed in fine, che con congiungersi insieme li quattro numeri 4, 5, 7, e 9 debba nascere la somma 25. Ma non è così, quando i numeri interi, che si vogliono sommare, sono composti, ed oltre all'unità semplici contengono ancora diecine, centinaja, migliaja, &c.

46. Quindi per l'addizione di questi tali numeri fa d'uopo osservare le seguenti tre regole. La prima si è di scrivere i numeri proposti talmente l'uno sotto l'altro, che l'unità corrispondano all'unità, le diecine alle diecine, le centinaja alle centinaja, le migliaja alle migliaja, e così in appresso. La seconda si è di tirare sotto di essi una linea, e di unire insieme primieramente tutte l'unità, indi tutte le diecine, poi tutte le centinaja, dopo tutte le migliaja, e così consecutivamente persino a tanto, che non vi rimanga altro da aggiun-

giungere. E la terza finalmente si è di scrivere tutte queste somme particolari ne' proprj luoghi sotto la linea tirata, cioè nel luogo dell' unità la somma dell' unità, nel luogo delle diecine la somma delle diecine, nel luogo delle centinaja la somma delle centinaja, e così dell' altre.

47. Ma per quanto a quest' ultima regola, è necessario avvertire, che se la somma dell' unità eccedesse il 9, e giungesse a contenere una, o più diecine; in tal caso nel luogo dell' unità si dovranno scrivere le sole unità, che in detta somma vi sono d' avanzo, o pure il zero, se mai non ve ne siano, e le diecine si dovranno serbare per la somma seguente, che si rapporta alle diecine. E così ancora, se la somma delle diecine, eccedendo il 9, contenesse uno, o più centinaja; in tal caso nel luogo delle diecine si dovranno scrivere le sole diecine, che vi sono d' avanzo nella riferita somma, o pure il zero, se mai non ve ne siano, e le centinaja si dovranno serbare per la somma seguente, che si rapporta alle centinaja. E l' istessa avvertenza si vuol avere per tutte l' altre somme, che seguono.

48. Debbansi a cagion di esempio unire insieme i tre numeri 3659362, 5406983, 8580694. Scrivansi primieramente l' uno sotto l' altro in guisa tale, secondo la prima regola, che l' unità corrispondano all' unità, le diecine alle diecine, le centinaja, alle centinaja, e così in appresso. Indi,

3659362
5406983
8580694
―――――
17647039

tirata sotto di essi la linea, si sommino prima l' unità, dicendo 4 e 3 danno 7, e 2 sono 9; la quale somma, perchè non contiene diecine, scrivasi sotto la linea nel luogo dell' unità. Somminsi poscia le diecine, dicendo 9 e 8 danno 17, e 6 sono 23; e poicchè questa loro somma ascende a due centi-



tina-

tinaja, e tiene d'avanzo tre diecine, fcrivafi il 3 fotto la linea nel luogo delle diecine, e le due centinaja ferbinfi per l'altre centinaja, che feguono. Quindi fommandofi in appreffo le centinaja, aggiunganfi alla loro fomma 18 le due centinaja ferbate; ed effendo in tutte 20, che fanno giuftamente due migliaja, pongafi il zero fotto la linea nel luogo delle centinaja, e le due migliaja ferbinfi per l'altre migliaja che feguono. Onde, continuata l'operazione collo fteffo artificio, fi ritroverà effere 17647039 la fomma de' numeri propofti.

49. Debbanfi in oltre unire infieme i feguenti quattro numeri 53907684, 5876059, 7429608, 850663. Scrivanfi fimilmente l'uno fotto l'altro con legge tale, che l'unità corrifpondano all'unità, le diecine alle diecine, le centinaja alle centinaja, e così confecutivamente. E poichè questi numeri non

```
53907684
 5876059
 7429608
  850663
--------
68064014
```

fono efpreffi con egual moltitudine di caratteri; quindi fi è, che le due ultime colonne verticali, le quali contengono i milioni femplici, e le diecine de' milioni non fiano egualmente ripiene. Tirata pofcia fotto di effi la linea, fomminfi con ordine così le loro unità, come le diecine, le centinaja, le migliaja, &c. de' medefimi numeri. Ed avendofi l'avvertenza di fcrivere fotto la linea nel proprio fuo luogo il fopravanzo di ciafcuna fomma, o pure il zero, fe niente di più vi rimane, e di ferbare le diecine in effa contenute per lo luogo feguente, fi ritroverà effere 68064014 la fomma intera de' numeri propofti.

50. Per quanto poi alla dimoftrazione di una tal operazione, ficcome ella dee dedurfi dal valore locale de' caratteri, con cui fono efpreffi i numeri,

meri, che debbonsi unire insieme; così non occorre distenderci nella formazione di essa, poichè per picciola riflessione, che si voglia fare, bastantemente può comprendersi da chicchesia. Più tosto egli è quì d' avvertirsi, che niente essendo più facile, quanto di errare nell'operazioni numeriche, sia costumanza degli Arimmetici di esaminare le loro operazioni, dopo averle eseguite, per vedere se siasi in esse errato. E quantunque sia molto ragionevole d' istituire un tal' esame per mezzo di altre operazioni, le quali siano più semplici di quelle, che debbonsi esaminare; tuttavolta per comprovare l' addizione, bisogna far uso dell' addizione medesima, in quanto che non abbiamo nell' Arimmetica operazione più semplice di quella.

51. Per vedere adunque, se siasi errato nell'addizione, non dovrà farsi altra cosa, che rifare la stessa operazione. Ma nel rifarla, giova talvolta serbare un'ordine contrario, dimodocchè se prima si sono ricavate le somme particolari con unire insieme i caratteri da giù in sù, indi si ricavino con unirli a rovescio da sù in giù. Così nel primo esempio si sono sommate l' unità, dicendo 4 e 3 danno 7, e 2 sono 9; onde qualora la stessa operazione dee rifarsi, potrà dirsi 2 e 3 danno 5, e 4 sono 9. Nè dee stimarsi di sì poco momento una tal' avvertenza. Imperochè avviene ben spesso, che l' errore commesso nelle somme particolari rimane impresso nella nostra mente insieme coll' ordine, che si è tenuto nel raccogliere dette somme. Onde, siccome serbando l' istesso ordine, possiamo ricadere sempre nel medesimo errore, così sarà egli facile l' evitarlo, qualora l' ordine s' inverte.

52. Quantevolte i numeri, che si sono uniti insieme, sono più di due, può farsi ancora l'esame dell' addizione di essi, con andarli sommando altra volta a due a due. Così nel primo esempio per vedere, se il numero 17647039 sia la somma degli altri tre 3659362, 5406983, 8580694, possono unirsi primieramente insieme i primi due, ed indi la somma di essi 9066345 potrà congiungersi col terzo numero:

mero; e poicchè quest' altra somma ritrovasi essere 17647039, dovrà conchiudersi, che nella prima operazione non siasi errato. E così ancora nell' altro esempio per vedere, se il numero 68064014 sia effettivamente la somma degli altri quattro 53907684, 5876059, 7429608, 850663, possono sommarsi separatamente così i due primi, come gli altri due rimanenti; ed essendo le loro somme 59783743, 8280271, le quali unite insieme danno il numero 68064014, segno sarà non essersi commesso errore nella prima operazione.

53. Ma una proprietà molto elegante del numero 9 ci somministra altro mezzo per esaminare facilmente ogni qualunque addizione. Consiste questa proprietà in ciò, che con sommarsi i caratteri di qualsivoglia numero, voglio dire i loro valori semplici, e con togliersi dalla loro somma il 9 per quanto si può, viene ad aversi l' istesso residuo, che rimarrebbe, se il 9 si togliesse successivamente dal numero medesimo. Così togliendo tutti i 9 contenuti nel 38 rimane 2, e l' istesso residuo ritrovasi togliendo il 9 dall' 11, che è la somma de' caratteri 3, e 8. Similmente se si tolgono tutti i 9 contenuti nell' 87 rimane 6, ed il medesimo residuo avrassi, se tolgasi il 9 dal 15, che è la somma de' caratteri 8, e 7. E così finalmente i caratteri del numero 257 sono 2, 5, e 7, li quali uniti insieme danno 14; e l' istesso residuo 5 s' incontrerà, o che si tolga il 9 dal 14, o che gradatamente si tolga dal numero 257.

54. Siccome adunque per mezzo di tal proprietà egli è facile di togliere tutti i 9 contenuti in qualsivoglia numero, e ritrovare ciò, che rimane; così potrà esaminarsi ogni addizione de' numeri interi, con fare una tal detrazione così dalli numeri, che si sono uniti insieme, come dalla loro somma. Imperocchè, conforme dobbiam conchiudere, che siasi errato, quantevolte il residuo della somma non corrisponde al residuo de' numeri sommati; così faremo tanto quanto certi di non essersi commesso errore, qualora questi due residui si ritrovano eguali.

si. Per procedere intanto con maggior speditezza nell'istituzione di un tal esame, giova andar togliendo il 9 a misura, che si avanza la somma de' caratteri. Anzi per quanto alli numeri, che si sono sommati, quantunque potrebbe notarsi separatamente il residuo di ciascuno, ed indi dalla loro somma togliersi di nuovo il 9; per aversi il residuo di detti numeri considerati insieme; tuttavolta riescirà l'operazione più semplice, se i caratteri dell'uno congiunganfi colli caratteri dell'altro, e dalla somma di essi vandasi gradatamente togliendo il 9.

55. Così nel primo esempio, se anderemo raccogliendo i caratteri delli tre numeri 3659362, 5406983, 8580694, che si sono sommati insieme, ed a misura, che si avanza la loro somma, toglieremo da essa il 9, ritroveremo per residuo l'unità, e poicchè l'istessa unità ritrovasi ancora, congiungendo insieme i caratteri del numero 17647039, e togliendo dalla somma di essi il 9, segno sarà, che questo numero sia effettivamente la somma di quelli. E così ancora nel secondo esempio se congiunganfi insieme i caratteri delli quattro numeri 53907684, 5876059, 7429608, 850663, che si sono sommati, ed a misura, che si avanza la loro somma, tolgasi da essa il 9, si ritroverà per residuo il 2; onde perchè l'istesso 2 ritroveremo altresì, congiungendo insieme i caratteri del numero 68064014, e togliendo dalla somma di essi il 9, dobbiamo conchiudere, che quest'altro numero sia effettivamente la somma de' quattro primi.

56. Per quanto tocca a questo esame, egli non è del tutto sicuro, potendo avvenire, che i due residui si ritrovino eguali tra loro, e tuttavolta che nell'operazione siasi errato. Avviene ciò, se mai l'errore commesso nella somma consista, o in una semplice trasposizione de' caratteri, o pure nell'essersi tanto diminuito uno di essi, per quanto un altro è stato aumentato. Fingasi per ragion di esempio, che la somma giusta debba essere 3756, da cui togliendo il 9 rimane 3. Or se in luogo

 di

di scrivere 3756 si fosse notato, o 3765, in cui i due caratteri 5 e 6 si sono traspostì, o pure 3729, in cui di quanto si è diminuito il 6, di altrettanto si è aumentato il 5, di già si sarebbe errato; e pure con togliersi il 9 così da 3765, come da 3729 rimane l'istesso 3. Ma non perciò dobbiamò astenerci da un tal'esame, per la ragione, che non così facilmente sogliono commettersi cotali spezie d'errori.

57. Ed invero, se i 9 si togliessero dalli numeri, come vanno tolti, e quanti se ne tolgono da quelli, che si sono sommati insieme, altrettanti se ne levassero dalla loro somma ritrovata; l'uguaglianza de' residui sarebbe sicura pruova di non essersi nell'operazione commesso errore: per la ragione, che siccome debbono essere eguali que' numeri, che coll'aggiunta di altri eguali diventano eguali; così eguali altresì, è necessario, che siano coloro, i quali colla detrazione di altri eguali rimangono eguali. Ma appunto quel compendio, che si prattica nel togliere i 9, fa, che il riferito esame non sia del tutto sicuro. La ragione poi di un tal compendio dipende dal valore locale de' caratteri, che si aumenta sempre nel decuplo (34). Imperocchè, siccome da ciò ne segue, che togliendosi i 9 dal valore locale di ogni carattere, debba rimanere o il suo valore semplice, o pure il zero, se tal carattere fosse 9; così si avrà il residuo della detrazione del 9 per quanto si può da ogni numero, se congiunti insieme i suoi caratteri, tolgasi il 9 dalla somma di essi.

58. Per ispiegarmi con maggior chiarezza, sia il numero 3576; e siccome egli contiene tre migliaja, cinque centinaja, sette diecine, e sei unità, così sarà lo stesso togliere i 9 da tutto il numero 3576, che andarli togliendo prima dalle sue parti, ed indi dalla somma de' loro rispettivi residui. Or con toglierli da 3000 rimane 3, con toglierli da 500 rimane 5, con toglierli da 70 rimane 7, e con toglierli da 6 rimane 6. Quindi, perchè congiungendo insieme questi residui

1, 5, 7, 6, e togliendo via i 9 dalla loro somma 21, rimane 3; dovrà essere l'istesso 3 il residuo, che rimane levando i 9 dall'intero numero 3576. Onde essendo que' residui 3, 5, 7, 6 i caratteri del medesimo numero 3576, si abbrevierà l'operazione, con unire semplicemente insieme tali caratteri, e con togliere il 9 per quanto si può dalla somma di essi.

59. Essendo così, egli è chiaro, che non per altra ragione compete al 9 una tal proprietà, se non se per lo stabilimento fatto dagli Arimmetici di computare i numeri per via di diecine (27): tanto vero, che se si vorrebbe fare il computo de' numeri per via de' senarj, una tal proprietà competerebbe al 5; come pure dovrebbe ascriversi al 2, se l'istesso computo vorrebbe farsi per via de' ternarj. Ma siccome nella presente costituzione, che abbiamo de' numeri, sì fatta proprietà è essenziale al 9; così non s'incontra nella prima diecina altro numero, a cui ella possa competere, se non se il 3: il quale tutta volta non per altra ragione si rende di essa partecipe, se non per essere egli la terza parte del 9, e per restituirci in conseguenza il 9, prendendosi tre volte. Onde per esaminare l'addizione de' numeri interi coll'accennato artificio, forzosamente dobbiamo avvalerci, o del numero 9, o pure dell'altro 3, che giustamente misura il 9.

## §. III.

### *Della Sottrazione de' numeri interi.*

60. Sottrazione si appella quella operazione, per mezzo di cui da un numero maggiore si toglie un'altro minore, e si determina il residuo, o pure ciò, che rimane, dopo essersi fatta tal detrazione. Quindi egli è facile ad intendersi, che la sottrazione debba essere interamente opposta all'addizione. Imperocchè, siccome con questa due numeri si aggiungono insieme, e si forma di essi

una somma sola (44); così per lo contrario colla sottrazione dal maggiore di due numeri disuguali dati si leva via l'altro minore, e ritrovasi la loro differenza. Onde avviene ancora, che conforme per mezzo dell'addizione i numeri si aumentano, così al contrario debbano minorarsi per mezzo della sottrazione.

61. Quantevolte i due numeri interi, tra' quali dee farsi la sottrazione, sono talmente semplici, che non contengono altra cosa, se non che sole unità; egli è facile con picciola riflessione, che si voglia fare, d'indagarne la loro differenza. Così ognuno vede, che togliendosi 2 da 5, debba rimanere 3; che 4 tolto da 9 debba dare 5 per residuo; e che con togliersi 2 da 8 debba restare 6. Ma non è così, quando la sottrazione dee farsi tra' numeri interi, che sono composti, e che oltre all'unità semplici contengono ancora diecine, centinaja, migliaja, &c. Onde per fare la sottrazione fra questi tali numeri, bisogna osservare le seguenti tre regole.

62. Primieramente il minore de' due numeri dati deesi talmente collocare sotto l'altro maggiore, che l'unità dell'uno corrispondano all'unità dell'altro, le diecine alle diecine, le centinaja alle centinaja, le migliaja alle migliaja, e così in appresso. In secondo luogo, tirata sotto di essi una linea, debbonsi sottrarre prima le unità del numero inferiore dall'unità del numero superiore, indi le diecine dalle diecine, poi le centinaja, dalle centinaja, dopo le migliaja dalle migliaja, e così consecutivamente persino a tanto, che non vi rimanga altro da sottrarre. Finalmente tutti i residui di queste particolari sottrazioni debbonsi scrivere sotto la linea ne' proprj luoghi, cioè il residuo dell'unità nel luogo dell'unità, il residuo delle diecine nel luogo delle diecine, il residuo delle centinaja nel luogo delle centinaja, e così degli altri. Ed in questa maniera si avrà sotto la linea il residuo totale, che si dimanda.

63. Vogliasi per ragion di esempio dal numero mag-

maggiore 765894 sottrarre l' altro minore 532652. Pongasi primieramente questo minore sotto l' altro maggiore con legge tale, che l' unità dell' uno corrispondano all' unità dell' altro, le diecine alle diecine, le centinaja alle centinaja, e così in ap-

765894
532652
——————
233242

presso. Indi, tirata sotto di essi la linea, facciansi con ordine tutte le sottrazioni particolari, incominciando da quella dell' unità. E poicchè da quattro unità togliendosi due unità, ne rimangono altre due, scrivasi 2 sotto la linea nel luogo stesso dell' unità. Ed ancora perchè da nove diecine togliendosi cinque diecine, ne rimangono altre quattro, scrivasi 4 sotto la linea nel luogo delle diecine. Ed andando innanzi sempre collo stesso metodo, si ritroverà essere 233242 il residuo della sottrazione proposta.

64. Potrebbe talvolta il numero maggiore avere qualche carattere di più dell' altro minore. Ed in tal caso, siccome nel collocarli si ritroverà, che egli co' suoi caratteri si estende più oltre per rapporto all' altro; così qualora si giungerà a quei caratteri, che in esso sopravanzano, può farsi conto, come da quelli non dovesse sottrarsi altro, che zero: qual cosa può avvenire ancora a' caratteri, che anno nel numero minore i loro corrispondenti, niente ostando, che tra i caratteri del numero minore vi sia framischiato qualche zero. Così volendosi dal numero maggiore 3587698 sottrarre l' altro minore 30403, si ritroverà, che giusta la debita loro situazione il primo si estende più oltre per rapporto al secondo con due caratteri. Onde, siccome tra gli altri suoi caratteri ve ne sono alcuni, a' quali effettivamente corrisponde il zero; così eziandio quei due, che in esso sopravanzano, debbono rapportarsi al zero. E perciò

ciò il residuo della sottrazione proposta sarà 3557295, non ricevendo un carattere significativo diminuzione veruna per la detrazione del zero, che niente significa.

$$\begin{array}{r} 3587698 \\ 30403 \\ \hline 3557295 \end{array}$$

65. Or se bene nella sottrazione da un numero maggiore debba togliersi un altro minore, non pertanto ciascheduno carattere del primo si ritroverà sempre maggiore del corrispondente carattere dell' altro. Quindi, siccome essendo detti caratteri fra essi eguali, niente dee rimanere dalla loro sottrazione; così essendo per lo contrario l' uno minore dell' altro, bisognerà aumentare quel minore di dieci, e prendere questi dieci dal carattere seguente, il quale perciò dovrà considerarsi in appresso come scemato di una unità. Così, volendosi sottrarre 6584743 da 9253548, rimane 5 dal-

$$\begin{array}{r} 9253548 \\ 6584743 \\ \hline 2668805 \end{array}$$

la sottrazione dell' unità, e 0 dalla sottrazione delle diecine; ma passandosi alle centinaja, e non potendosi 7 togliere da 5, si toglierà quel 7 da 15, cosicchè il residuo sia 8; ed indi venendosi alle migliaja, dovrà considerarsi il 3 come se fosse 2, e non potendosi ancora da 2 togliere 4, si toglierà questo 4 da 12, che darà 8 per residuo. Onde, andando innanzi con questo stesso artificio, ritroveremo essere 2668805 il totale residuo della sottrazione proposta.

66. Il medesimo artificio dee pratticarsi ancora, se uno de' caratteri del numero superiore fosse zero, e ad esso corrispondesse carattere significativo nell'

nell' altro inferiore ; poicchè non potendo ivi aver luogo la sottrazione, dovrà prendersi una unità dal carattere seguente, e questa trasportarsi nel luogo del zero, ove in conseguenza valerà 10. Ma perchè nel servirsi di un tal' artificio potrebbe avvenire, che il carattere seguente fosse zero; perciò vuol aversi ancora l' avvertenza, che se mai ciò avviene, dovrà prendersi l' unità dall' altro, che segue, la quale siccome trasportata nel luogo del zero farà, che questo sia 10, così lo renderà valevole altresì a dare una unità al carattere suo precedente. Nè altrimenti dee farsi, se non già uno, ma due, o più de' caratteri seguenti si ritrovassero essere zero. Imperocchè, dopo essersi aumentato di dieci il carattere minore, dovrà considerarsi ciascuno de' zeri, che seguono, come se fosse 9, ed indi scemarsi di una unità il carattere significativo, che prima s' incontra.

67. Debbasi per ragion di esempio sottrarre 3952773 da 8500030. Poicchè le tre unità non

$$\begin{array}{r} 8500030 \\ 3952873 \\ \hline 4547157 \end{array}$$

possono togliersi da 0, si leveranno da 10, e sarà 7 il loro residuo. Similmente poicchè dalle due diecine, che rimangono, non possono togliersi le altre sette, si leveranno queste da 12, e sarà 5 il loro residuo. Quindi tutti i zeri, che seguono, debbono considerarsi come altrettanti 9, onde sarà 1 il residuo delle centinaja, 7 il residuo delle migliaja, e 4 il residuo delle diecine di migliaja. Ma venendosi alle centinaja delle stesse migliaja, il 5 dee aversi come se fosse 4; e poicchè da 4 non può togliersi 9, si leverà questo 9 da 14, cosicchè il residuo sia 5. E togliendo finalmente i tre milioni dagli altri sette, che rimangono, avremo 4 per loro residuo; con che il totale residuo della sottrazione proposta sarà 4547157.

68.No-

68. Notisi quì intanto, che se bene, essendo minore uno de' caratteri superiori, debbasi per la sottrazione prendere una unità dal carattere, che segue, e questa trasportarsi nel luogo di quell' altro minore; tuttavolta senza scemarsi di essa il carattere seguente, si potrebbe la medesima aggiungere all' altro, che li corrisponde nel numero inferiore. Così nell' ultimo esempio, dopo essersi tolto 3 da 10, e notato sotto la linea il residuo 7, si potrebbe in appresso non già da 12 togliere 7, ma da 13 levare 8, e si avrà lo stesso residuo 5. Onde ancora venendosi alle centinaja, si potrebbe non già da 9 togliere 8, ma da 10 sottrarre 9. E così parimente potremmo da 10 togliere 3 passando alle migliaja, da 10 togliero 5 passando alle diecine di migliaja, da 15 togliere 10 passando alle centinaja di migliaja, ed in fine da 8 togliere 4 passando alli milioni; essendo chiaro che ancora così debbano incontrarsi da per tutto gli stessi residui.

69. In effetto la maniera di sottrarre più usitata presso i Prattici si è di aggiungere al carattere inferiore quell' unità, di cui talvolta si ha bisogno; anzi nel trasportarsi la medesima nel luogo precedente, ove propriamente vale 10, nè pure ella si aggiunge al carattere ivi esistente, ma prima si fa la sottrazione con essa sola, ed indi al residuo si aggiunge quel carattere. Così volendosi 2875759 sottrarre da 7250346, l' operazione suol farsi in questa maniera. Primieramente non potendosi 9

$$\begin{array}{r} 7250346 \\ 2875759 \\ \hline 4374587 \end{array}$$

togliere da 6, si dirà 9 da 10 dà 1, che insieme con 6 fa 7. Si aggiunge poscia 1 al 5, che segue; e non potendosi ancora 6 togliere da 4, si dirà 6 da 10 dà 4, che insieme coll' altro 4 superiore fa 8. E così parimente aggiungendosi 1 al carattere seguente 7, e non potendosi 8 togliere da 3, si di-

si dirà 8 da 10 dà 2, che insieme con 3 fa 5. Onde andando innanzi collo stesso artificio, si ritroverà finalmente, che il residuo della sottrazione proposta sia 4374587.

70. Del rimanente la dimostrazione di quanto fin' ora si è detto intorno alla sottrazione de' numeri interi, siccome ella dipende dallo stabilimento fatto dagli Arimmetici di far aumentare il valore locale de' caratteri sempre nel decuplo (34), così molto più facilmente si comprenderà meditandola, che se vorremmo quì minutamente distenderla. Per quanto poi all' esame di una tal operazione, può quello istituirsi per mezzo dell' addizione, che è una operazione molto più semplice, cioè con aggiungersi il residuo ritrovato al numero minore, e con vedersi se la somma, che ne risulta, corrisponde all' altro maggiore. Imperocchè, essendo quel residuo la differenza tra il numero maggiore, ed il numero minore; forzosamente coll' aggiunta di esso al numero minore dee nascere l' altro maggiore.

71. Con un' altra sottrazione può esaminarsi ancora quella già fatta, cioè con togliersi il residuo ritrovato dal numero maggiore, e con vedersi se questo nuovo residuo sia eguale all' altro numero minore. Imperocchè, siccome la differenza di due numeri disuguali aggiunta al minore dee darci per somma l' altro maggiore, così per lo contrario la stessa differenza tolta dal maggiore dee darci per residuo l' altro minore. In effetto la differenza de' due numeri 25, e 15 è 10; e conforme aggiungendosi 10 a 15, si ha per somma 25, così togliendosi 10 da 25 rimane 15. Similmente la differenza de' due numeri 50, e 30 è 20; ed egli è chiaro, che conforme con aggiungersi 20 a 30 ne risulta 50, così con togliersi 20 da 50, si ha 30 per residuo.

72. Ma da ciò, che il residuo ritrovato con aggiungersi al numero minore debba darci l' altro maggiore, può farsi l' esame della sottrazione eziandio colla detrazione del 9, secondo si è fatto nell' addi-

addizione medesima (54). Tolgasi adunque il 9 per quanto si può dalla somma, che nasce, congiungendosi insieme i caratteri così del residuo ritrovato, come del numerò minore. E se ciò, che rimane, ritrovisi eguale a quel tanto resta, facendosi una simil detrazione del 9 dalla somma de' caratteri dell' altro numero maggiore; sarà questa uguaglianza un segno tanto quanto sicuro di non essersi errato nella sottrazione. Or facendo uso di ciascuno di questi tre esami negli esempj rapportati di sopra, ritroveremo, che in nessuno di essi vi sia errore.

73. Finalmente merita qui di essere avvertito, che dopo averci renduta familiare la sottrazione, potremo al contrario per mezzo di essa esaminare l'addizione; per la ragione, che se dalla somma di due numeri tolgasi uno di essi, necessariamente il residuo dee essere l'altro numero. Nè dee farci difficoltà, che talvolta non già due, ma molti numeri si sommano insieme. Imperocchè potremo esaminare sempre l'addizione con togliere dalla somma ritrovata uno di detti numeri, con questo solo divario, che essendo due i numeri sommati insieme, il residuo dee darci l'altro numero; ed essendo molti, l'istesso residuo dee essere eguale alla somma degli altri.

## §. IV.

### *Della Moltiplicazione de' numeri interi.*

74. DUE numeri interi si dicono moltiplicarsi tra loro, quantevolte uno di essi si prende tante volte, quante unità si contengono nell'altro. Così prendendosi 4 tre volte, diremo 4 moltiplicarsi per 3; e similmente prendendosi 7 cinque volte, diremo 7 moltiplicarsi per 5. Quindi la moltiplicazione de' numeri interi può riguardarsi come un'addizione reiterata, in quando che per mezzo di essa non si fa altra cosa, se non che unire un numero più volte a se medesimo, o pure unirne molti tra loro eguali. Come doven-

vendosi moltiplicare 4 per 3, effettivamente si aggiungono insieme tre 4; ed ancora dovendosi moltiplicare 7 per 5, realmente si uniscono insieme cinque 7.

75. Delli due numeri, che debbonsi tra loro moltiplicare, l' uno dicesi moltiplicando, e l' altro moltiplicante, ovvero moltiplicatore. E quantunque tali nomi si possono ad essi dare indifferentemente; nientedimeno egli è più ragionevole, che il maggiore si consideri come moltiplicando, ed il minore come moltiplicante, o sia moltiplicatore. In effetto l' istessa cosa è moltiplicare 9 per 4, che 4 per 9; ma l' addizione reiterata, a cui la moltiplicazione riducesi, riesce più compendiosa nel primo caso, che nel secondo, per la ragione, che in quello debbono sommarsi quattro 9, ed in questo uopo è, che si congiungano insieme nove 4.

76. Ma non bisogna in ciò essere molto scrupoloso, e secondo si è detto, può prendersi ciascheduno delli due numeri, tanto come moltiplicando, quanto come moltiplicatore. Per quanto poi al terzo numero, che risulta dalla moltiplicazione de' due dati, egli chiamasi sempre prodotto; siccome è il 12, che si ha moltiplicandosi 4 per 3; o pure il 35, che nasce dalla moltiplicazione di 7 per 5. Ed egli è chiaro, che il prodotto della moltiplicazione debba essere tale, che facendosi dal moltiplicando le veci dell' unità, debba egli il prodotto fare le veci del moltiplicatore. Come in effetto, se l' unità s' interpetri per 4; il 3, che la contiene tre volte, dovrà interpetrarsi per 12. Ed ancora se l' unità rappresenti il 7; il 5, che la contiene cinque volte, dovrà rappresentare 35.

77. Or quantevolte i due numeri, che debbonsi tra loro moltiplicare, non contengono altra cosa, se non che semplici unità, dovrà farsi effettivamente la moltiplicazione di essi per mezzo dell' addizione reiterata. Quindi giova assuefare la nostra lingua al computo di que' numeri, che risultano con ripetersi persino a nove volte un medesimo

desimo numero semplice. Così per lo 2 bisogna essere pronto nel dire due, quattro, sei, otto, dieci, dodici, quattordici, sedici diciotto; per lo 3 è necessario, che sia a noi familiare la serie tre, sei, nove, dodici, quindici, diciotto, ventuno, ventiquattro, ventisette; e ciò persino al 9, a cui corrisponde la serie nove, diciotto, ventisette, trentasei, quarantacinque, cinquantaquattro, sessantatre, settantadue, ottantuno.

78. Intanto persino a che non siano a noi familiari queste serie, non sarà mal fatto collocare le medesime con ordine in tante casette, l'una sotto l'altra; con porre prima quella dell'unità, indi quella del 2, poi quella del 3, e così consecutivamente persino alla serie del 9, tantocchè venga a formarsi la seguente Tavola, che chiamasi Pittagorica per la ragione, che inventore di essa credesi comunemente esserne stato Pittagora. Ed egli

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

è fuor di ogni dubbio, che con questa tavola si agevola non poco la moltiplicazione de' numeri semplici; poichè prendendo uno di essi nella prima

ma colonna orizontale, ed il secondo nella prima verticale, se da quello caleremo giù per l'altra sua verticale, e da questo anderemo per l'altra sua orizontale, ritroveremo nell'incontro di quest'altre due colonne il prodotto, che si dimanda.

79. Così volendo moltiplicare tra loro i due numeri semplici 5, e 7, io prendo primieramente il 5 nella prima colonna orizontale, ed il 7 nella prima colonna verticale; indi determinata così l'altra verticale, che corrisponde al primo, come l'altra orizontale, che si rapporta al secondo, io osservo qual numero ritrovasi nell'incontro di quest' altre due colonne; e poicchè nel suddetto incontro esiste il 35, io concludo, che l'istesso 35 sia il prodotto, che si cerca. Or dell'istessa maniera si ritroverà, che sia 36 il prodotto di 9 moltiplicato per 4, che sia 56 il prodotto di 8 moltiplicato per 7, che sia 49 il prodotto di 7 moltiplicato per 7, ed in fine che sia 81 il prodotto di 9 moltiplicato per 9. Nè in vero vi saranno numeri semplici, che non si potranno tra loro moltiplicare per mezzo della riferita tavola.

80. Dopo essersi esercitato nella moltiplicazione de' numeri semplici, si passerà a quella degli altri composti. Ed in primo luogo, dovendosi moltiplicare un numero composto per un' altro semplice; si scriverà questo sotto quello nel luogo delle unità. Indi, tirata più sotto la linea, si moltiplicheranno per lo numero semplice tutti i caratteri del numero composto, cosicchè siano moltiplicate per quello prima le sue unità, poi le sue diecine, dopo le sue centinaja, e così in appresso. Finalmente si scriveranno tutti questi prodotti particolari ne' proprj luoghi sotto la linea tirata, cioè nel luogo delle unità quello nato dalle unità, nel luogo delle diecine quello nato dalle decine, nel luogo delle centinaja quello nato dalle centinaja, e così degli altri. Ed in questa maniera si avrà sotto la medesima linea il prodotto totale della moltiplicazione proposta.

81. Bisogna intanto aver l'avvertenza, che se

il prodotto delle unità eccedesse il 9, e giungesse a contenere una, o più diecine; in tal caso nel luogo delle unità si dovranno scrivere le sole unità, che vi sono d'avanzo, o pure il zero, se mai non ve ne siano, e le diecine si dovranno serbare per lo prodotto seguente, che si rapporta alle diecine. E così ancora, se il prodotto delle diecine, eccedendo il 9, contenesse uno, o più centinaja; in tal caso nel luogo delle diecine si dovranno scrivere le sole diecine, che vi sono di avanzo, e pure il zero, se mai non ve ne siano, e le centinaja si dovranno serbare per lo prodotto seguente, che si rapporta alle centinaja. E la medesima avvertenza si vuol avere per tutti gli altri prodotti, che seguono.

82. Debbasi per ragion di esempio moltiplicare il numero composto 375682 per l'altro semplice 3. Scrivasi primieramente questo sotto quello nel luogo, ove sono le unità. Indi, tirata più sotto la linea,

$$\begin{array}{r} 375682 \\ 3 \\ \hline 1127046 \end{array}$$

si moltiplichino prima per 3 le due unità del numero composto, dicendo 2 via 3 fan 6; e poicchè questo prodotto non contiene diecine, scrivasi il 6 sotto la linea nel luogo delle unità. Si moltiplichino poscia per 3 le otto diecine, dicendo 8 via 3 fan 24; e poicchè quest'altro prodotto ascende a due centinaja, e tiene d'avanzo quattro diecine, scrivasi il 4 sotto la linea nel luogo delle diecine, e le due centinaja serbinsi per l'altre centinaja, che seguono. Quindi, moltiplicate in appresso per 3 le sei centinaja, aggiunngansi al loro prodotto 18 le due centinaja serbate; ed essendo in tutto 20, che fanno giustamente due migliaja, pongasi il zero sotto la linea nel luogo delle centinaja, e le due migliaja serbinsi per l'altre migliaja, che seguono. Onde, continuata l'operazione

ne collo stesso artificio, si ritroverà essere 1127046 il prodotto de' numeri proposti.

83. Che se poi i due numeri, che debbonsi moltiplicare tra loro, siano composti, in tal caso scrivasi primieramente il minore di essi sotto l' altro maggiore con legge tale, che le unità corrispondano alle unità, le diecine alle diecine, le centinaja alle centinaja, e così in appresso. Indi, tirata sotto i medesimi la linea, moltiplichisi separatamente il numero superiore per tutti i caratteri dell' altro inferiore, come se fossero numeri semplici, cioè prima per quello delle unità, dopo per quello delle diecine, poi per quello delle centinaja, e così consecutivamente. Scrivansi poscia tutti questi prodotti parziali l' uno sotto l' altro abbasso la linea, cosicchè il primo di essi per essere di unità incominci dal luogo delle unità, il secondo per essere di diecine incominci dal luogo delle diecine, il terzo per essere di centinaja incominci dal luogo delle centinaja, e così degli altri. E finalmente sommandosi i medesimi prodotti parziali secondo l' ordine, con cui si sono situati, si avrà il prodotto totale della moltiplicazione proposta.

84. Vogliasi a cagion di esempio moltiplicare il numero composto 357986 per l' altro similmente composto 574. Scrivasi questo minore sotto quell' altro maggiore talmente, che le unità siano sotto le unità, le diecine sotto le diecine, e le centinaja sotto le centinaja. Indi, tirata sotto di essi la

```
  357986
     574
  ------
 1431944
2505902
1789930
---------
205483964
```

linea, moltiplichisi primieramente il numero superiore per 4, che è il primo carattere dell' altro

 in-

inferiore ; ed il prodotto, che si avrà, 1431944 scrivasi sotto la linea, cosicchè incominci dal luogo delle unità. Si moltiplichi di poi l'istesso numero superiore per 7, che è il secondo carattere dell' altro inferiore ; ed il prodotto, che ne risulta, 2505902 scrivasi sotto il primo, ma in guisa tale, che incominci dal luogo delle diecine. Si moltiplichi finalmente il medesimo numero superiore per 5, che è il terzo ed ultimo carattere dell' altro inferiore ; ed il prodotto, che si genera, 1789930 scrivasi sotto il secondo con legge tale, che incominci dal luogo delle centinaja. Si sommino poscia tutti tre questi prodotti parziali secondo l' ordine, che si è tenuto nel scriverli sotto la linea ; e la somma di essi 205483964 sarà il prodotto totale, che si dimanda.

85. Notisi intanto, che se tra i caratteri di uno de' numeri, che debbonsi moltiplicare insieme, vi sia framischiato qualche zero ; in tal caso dalla moltiplicazione di esso per gli caratteri dell' altro numero dovrà prodursi ancora zero, per la ragione, che siccome il zero niente significa, così nè pure potrà ricevere valore alcuno per quantevolte egli si prenda. Me se mai tal zero si ritrovi tra i caratteri del numero inferiore ; non occorre scrivere sotto la linea tutta quella serie de' zeri, che vi anderebbe posta nel moltiplicarsi per esso il numero superiore, ma basterà porre nel proprio suo luogo il primo zero, ed indi proseguire più innanzi coll' altro prodotto, che viene in appresso. Così dovendosi moltiplicare 357096 per 504, dopo

$$\begin{array}{r} 357096 \\ 504 \\ \hline 1428384 \\ 17854800 \\ \hline 179976384 \end{array}$$

essersi posto sotto la linea il prodotto, che nasce dalla moltiplicazione di quel numero per 4, si dovrebbe

vrebbe porre più sotto l'altro, che risulta dalla sua moltiplicazione per zero; ma essendo questo una serie de' zeri, basterà porre un solo zero nel luogo delle diecine, ed indi andare innanzi col prodotto, che si ha moltiplicandosi quello stesso numero per 5.

86. Un'altro compendio ancora egli è da praticarsi, qualora i due numeri, che si debbono moltiplicare tra loro, anno molti zeri ne' primi loro luoghi; e si è di moltiplicare semplicemente i loro caratteri significativi, e di aggiungere in appresso al prodotto tanti zeri, quanti se ne ritrovano ne' primi luoghi di amendue i numeri. Così, dovendosi moltiplicare 300 per 20, basterà moltiplicare 3 per 2, ed al prodotto 6 aggiungere tre zeri, per essere 6000 il prodotto, che si dimanda. E così ancora, dovendosi moltiplicare 25000 per 400, basterà moltiplicare 25 per 4, ed al prodotto 100 aggiungere cinque zeri, per essere 10000000 il prodotto, che si cerca. Ma se si dovesse moltiplicare 305000 per 30, in tal caso al prodotto non già di 35 per 3, ma di 305 per 3 si dovrebbero aggiungere quattro zeri, per potersi compendiosamente avere il prodotto della moltiplicazione proposta.

87. Del rimanente, siccome la ragione di questo compendio dipende dall'artificio, che si tiene nella moltiplicazione de' numeri interi; così la dimostrazione di un tal'artificio per picciola riflessione, che si voglia fare, si vedrà, che debba dedursi dal valore locale de' caratteri, che si aumenta sempre del decuplo (34). Per quanto poi all'esame di questa operazione, può egli per ora istituirsi per mezzo della detrazione del 9, e dovrà farsi in questa maniera. Tolgansi primieramente tutti i 9, così dal moltiplicando, come dal moltiplicatore; indi, moltiplicati tra loro i numeri, che rimangono, tolgasi ancora il 9 da questo prodotto; vedasi poscia, se questo nuovo residuo sia eguale a quel tanto rimane, togliendo altresì tutti i 9 dal prodotto della moltiplicazione, di cui si tratta; e

questa uguaglianza ci renderà tanto quanto sicuri di non essersi errato.

88. Così nel primo esempio con togliersi i 9 dal moltiplicando, e dal moltiplicatore rimangono 4, e 3, li quali moltiplicati tra loro danno 12; e poicchè con togliersi il 9 così da 12, come dal prodotto rittovato rimane sempre 3, dobbiamo conchiudere, che non si sia ivi commesso errore. Similmente nel secondo esempio, togliendosi il 9 per quanto si può dal moltiplicando, e dal moltiplicatore, rimangono 2, e 7, che tra loro moltiplicati danno 14; onde perchè togliendosi ancora il 9 così da 14, come dal prodotto ritrovato rimane 5, segno sarà, che nè pure ivi siasi errato. E così finalmente nel terzo esempio i residui, che si anno con togliersi tutti i 9 dal moltiplicando, e dal moltiplicatore, sono 3, e 0, li quali moltiplicati tra loro danno 0 per prodotto; onde perchè colla detrazione del 9 così da questo prodotto, come dall'altro ritrovato nella moltiplicazione, di cui si tratta, ritrovasi sempre 0 per residuo, segno sarà, che nè tampoco nel terzo esempio vi sia errore.

89. La ragione dell'esposto esame s'intenderà facilmente dopo essersi avvertite due cose. La prima si è, che essendovi due numeri, ciascuno composto di due altri, il loro prodotto debba essere eguale alli quattro, che si anno, moltiplicandosi ciascuno de' componenti del primo per ciascuno de' componenti del secondo. Così, considerandosi il numero 10 come composto di 6, e 4, ed il numero 5 come composto di 3, e 2, vedesi chiaramente, che il prodotto di 10 per 5 racchiude in se quattro prodotti, cioè uno di 6 per 3, l'altro di 6 per 2, il terzo di 4 per 3, ed il quarto di 4 per 2. L'altra si è, che se in un numero si contiene esattamente il 9, ancora nel prodotto di quel numero per un' altro qualsivoglia dovrà contenersi il 9 con esattezza. Così nel 18 si contiene il 9 giustamente due volte, e qualunque sia l' altro numero, per cui si moltiplichi 18, si vedrà, che

che ancora nel prodotto sarà contenuto il 9 giustamente, e senza residuo.

90. Avvertite tali cose, ecco ora la ragione dell' esame proposto. Fingiamo, che sia 754 il moltiplicando, ed 85 il moltiplicatore. E conforme, con togliersi da essi tutti i 9, s' incontrano i due residui 7, e 4; così il primo 754 potrà considerarsi come composto da 747, e 7, ed il secondo 85 come composto da 81, e 4. Onde nel prodotto totale de' medesimi numeri dovranno essere racchiusi quattro prodotti parziali, cioè uno di 747 per 81, l'altro di 747 per 4, il terzo di 7 per 81, ed il quarto di 7 per 4. Or contenendosi il 9 esattamente in ciascuno delli due numeri 747, ed 81, dovrà egli contenersi ancora con esattezza in ciascuno de' primi tre prodotti parziali; onde se colla detrazione del 9 dal prodotto totale s' incontrerà qualche residuo, questo dovrà derivare dal quarto prodotto parziale di 7 per 4; e pertanto forzosamente dovrà egli essere eguale a ciò, che rimane, togliendosi i 9 dal prodotto di 7 per 4.

## §. V.

### *Della Divisione de' numeri interi.*

91. UN numero intero si dice dividersi per un' altro numero intero, qualora ricercandosi quantevolte il secondo si contiene nel primo, si prende di quello una porzione tale, che possa essere dinotata dall' altro. Così, prendendosi di 12 la terza parte, che è 4, diremo 12 dividersi per 3; e similmente prendendosi di 35 la quinta parte, che è 7, diremo 35 dividersi per 5. Quindi la divisione de' numeri interi può riguardarsi come una sottrazione reiterata, in quanto che per mezzo di essa non si fa altra cosa, che dal numero da dividersi sottrarre l' altro, per cui si dee dividere, tantevolte, quante ne permette la loro indole. Come per prendersi la terza parte di 12, effettivamente il 3 dee togliersi da 12 quattro vol-

te; ed ancora, per prenderſi la quinta parte di 35, realmente il 5 dee toglierſi da 35 ſette volte.

92. Poicchè dunque la moltiplicazione de' numeri interi è un'addizione reiterata (74), e la diviſione de' medeſimi numeri è una ſottrazione reiterata; egli è chiaro, che ſiccome l' addizione, e la ſottrazione ſono operazioni tra loro oppoſte (60), così eziandio debbano averſi come operazioni contrarie la moltiplicazione, e la diviſione. Ed in effetto per poco, che ſi voglia riflettère, ſi vedrà chiaramente, che queltanto ſi compone per mezzo della moltiplicazione, ſi riſolve di bel nuovo per mezzo della diviſione. Così moltiplicandoſi 4 per 3 ſi compone 12, e per lo contrario dividendoſi 12 per 3 ſi ritorna al 4; e così ancora moltiplicandoſi 7 per 5 ſi compone 35, ed al contrario dividendoſi 35 per 5 ſi ritorna al 7.

93. Delli due numeri dati per la diviſione da farſi, ſiccome chiamaſi ſempre dividendo quello, che biſogna dividere; così l'altro, per cui il primo dee dividerſi, ſi appella ſempre dividente, ovvero diviſore. Il terzo numero poi, che dalla diviſione ſteſſa ricavaſi, diceſi quoto, ovvero quoziente; ſiccome è il 4, che ſi ha dividendoſi 12 per 3; o pure il 7, che ſi ritrova dividendoſi 35 per 5. Ed egli è chiaro, che il quoziente della diviſione debba eſſere tale, che facendoſi dal diviſore le veci dell' unità, debba egli il quoziente fare le veci del dividendo. Come in effetto nella diviſione di 12 per 3, ſe l' unità s' interpetri per 3, il quoziente 4 dovrà interpetrarſi per 12; ed ancora nella diviſione di 35 per 5, ſe l' unità rappreſenti il 5, dovrà il quoziente 7 rappreſentare il 35.

94. Notiſi intanto, che ſecondo la nozione data della diviſione, ſiccome ella può farſi all' ora ſolamente, quando il diviſore è minore del dividendo; così ancora in queſto caſo potrebbe avvenire, che non poſſa la ſteſſa farſi con eſattezza, ma che reſti nel dividendo qualche avanzo: il quale perciò dovrà chiamarſi reſiduo della diviſione medeſima. Così, dovendoſi dividere 14 per 3, ſi ve-

si vedrà, che il 3 può sottrarsi da 14 quattro volte, e che vi sia 2 d'avanzo; onde il 4 si dirà essere quoziente della divisione, ed il 2 suo residuo. Similmente, dovendosi dividere 38 per 5, si vedrà, che il 5 può sottrarsi da 38 sette volte, e che vi sia 3 d'avanzo; onde il 7 si dirà essere quoziente della divisione, ed il 3 residuo della medesima.

95. Or essendo il divisore un numero semplice, e non giungendo il dividendo al decuplo di quel numero, dovrà farsi la divisione effettivamente per mezzo della sottrazione reiterata; onde si è, che ancora quì bisogna assuefare la nostra lingua al computo di que' numeri, che risultano con ripetersi persino a nove volte un medesimo numero semplice. Ma in ciò potrebbe eziandio esserci di qualche uso la tavola Pittagorica, di cui si è parlato di sopra (78), bastando ricercare il divisore nella prima sua colonna orizontale, ed indi calar giù per l'altra verticale, che li corrisponde. Imperocchè, dovendosi ritrovare in quest' altra colonna, o il dividendo medesimo, o pure altro numero, che manchi da quello per meno del divisore; per necessità con andarsi poscia dalla casetta, ove egli si ritrova, orizontalmente persino alla prima colonna verticale, dovrà incontrarsi in essa il quoziente, che si dimanda.

96. Così dovendosi dividere 56 per 7, cerchisi il divisore 7 nella prima colonna orizontale della tavola, e calando giù per l'altra verticale, si ritroverà in essa l'istesso dividendo 56; onde perchè andando da questo 56 orizontalmente persino alla prima colonna verticale, incontriamo ivi l'8, sarà questo 8 il quoziente della divisione proposta. Similmente dovendosi dividere 75 per 8, cerchisi il divisore 8 nella prima colonna orizontale, e calando giù per l'altra verticale, che li corrisponde, ritroveremo in essa il numero 72, che manca dal dividendo 75 per 3 minore del divisore 8; onde, perchè andando dal 72 orizontalmente persino alla prima colonna verticale, s'incontra ivi il 9,

il 9, sarà questo 9 il quoziente della divisione proposta, e quel 3, per cui 72 manca da 75, sarà ancora il suo residuo.

97. Dopo averci rendute familiari sì fatte divisioni, che sono le più semplici, non sarà egli difficile di fare ancora l'altre, che possono occorrere. Ed in primo luogo dovendosi dividere qualunque numero composto per un' altro semplice, il metodo da tenersi sarà questo. Pongasi il dividendo da un lato, ed il divisore dall'altro; indi, tirata una linea sotto il divisore per collocare abbasso di essa il quoziente, dividansi per quello stesso divisore separatamente tutti i caratteri del dividendo; ma nel fare queste divisioni parziali bisogna incominciare non già dal primo carattere, siccome si è fatto nell'altre operazioni, ma bensì dall'ultimo per la ragione, che or ora diremo. E se mai ciascuna di esse possa farsi esattamente, e senza residuo, con scriversi i loro quozienti l'uno presso l'altro sotto la linea tirata, si avrà il quoziente totale della divisione proposta.

98. Debbasi per ragion di esempio dividere il numero composto 864846 per l'altro semplice 2. Dopo essersi collocato il dividendo da un lato, ed il divisore dall'altro, e dopo essersi tirata ancora una linea sotto il divisore, dividansi separatamente tutti i caratteri del dividendo per lo divisore 2, con incominciare dall'ultimo 8. E poicchè

864846 2

432423

8 diviso per 2 dà 4, scrivasi questo quoziente 4 sotto la linea. Dividasi poscia l'altro carattere, che segue, 6 per lo stesso divisore 2; e poicchè 6 diviso per 2 dà 3, scrivasi quest'altro quoziente 3 presso al primo, cosicchè si abbia 43. Dividasi di poi il carattere 4, che viene in appresso, per lo medesimo divisore 2; e poicchè 4 diviso per 2 dà 2, scrivasi questo terzo quoziente 2 presso i primi

mi due talmente, che si abbia 432. Onde, continuata l'operazione persino a che non resti nel dividendo carattere veruno, sarà 432423 il quoziente totale della divisione proposta.

99. Che se poi per rapporto a qualche carattere del dividendo la divisione non possa eseguirsi senza residuo, in tal caso nella divisione, che dovrà farsi dell'altro carattere, che segue, è necessario tenersi conto di quel residuo; ed appunto per questi residui avviene, che le divisioni particolari debbano incominciarsi non già dal primo, ma dall'ultimo carattere del dividendo. Intanto, perchè egli è molto facile di errare in detti residui; perciò dopo essersi notato sotto la linea il quoziente particolare, giova moltiplicarlo per lo divisore medesimo, e colla sottrazione del prodotto da quel tanto è stato diviso investigare il vero, e giusto residuo: a cui poscia potrà apporsi il seguente carattere del dividendo per far passaggio all'altra divisione particolare, nella quale si è detto doversi tener conto di quel residuo.

100. Vogliasi perciò dividere il numero composto 9587 per l'altro semplice 4. Dividasi primie-

```
9587    |  4
8       |------
----    | 2396
 15
 12
----
  38
  36
----
   27
   24
----
    3
```

ramente 9 per 4; e posto il quoziente 2 sotto la linea, si moltiplichi 2 per 4, e tolgasi il prodotto 8 dal carattere diviso 9, che darà 1 per residuo di quella prima divisione. Appongasi di poi a que-

a questo residuo il carattere seguente 5, e dividasi tutto 15 per 4; e notato il quoziente 3 sotto la linea, si moltiplichi 3 per 4, ed il prodotto 12 tolgasi dal numero diviso 15, che darà 3 per residuo della seconda divisione. E così ancora, dopo essersi apposto a quest' altro residuo il carattere seguente 8, dividasi tutto 38 per 4; e notato il quoziente 9 sotto la linea, si moltiplichi 9 per 4, ed il prodotto 36 tolgasi dal numero diviso 38, che darà 2 per residuo della terza divisione. Onde, continuata l' operazione collo stesso metodo, si ritroverà essere 2396 il quoziente totale della proposta divisione. E poicchè dall' ultima divisione parziale rimane 3, di cui non può tenersi conto, per non esservi nel dividendo altro carattere; dovrà considerarsi quel 3 come residuo della stessa divisione proposta.

101. Notisi intanto, che potrebbe tal volta avvenire, che una qualche divisione parziale non possa farsi, per la ragione, che ritrovasi minore del divisore queltanto dee dividersi. Quando ciò avviene, sarà zero il quoziente di sì fatta divisione; e si terrà conto di queltanto, che bisognava dividere, nell' altra divisione, che segue. Quel zero però, che si dovrà avere come suo quoziente, non occorre notarsi sotto la linea, se mai derivi dalla prima divisione parziale da farsi, per la ragione, che non precedendo egli ad alcuno carattere significativo, di niente aumenta il quoziente totale, che si dimanda (39); ma per lo contrario bisogna sempre, che egli si noti, qualora nasce da alcuna dell' altre divisioni parziali, che seguono, poicchè colla sua posizione viene ad aumentarsi il quoziente totale. E poicchè ciò può avvenire non solamente in una, ma in due, o più divisioni parziali consecutive; pertanto dee aversi l' avvertenza, che per ciascuna di esse è necessario notare un zero sotto la linea.

102. Debbasi a tal' effetto dividere il numero composto 345354 per 5. Poicchè il primo carattere 3 non può dividersi per 5; perciò senza notarsi

zero

zero sotto la linea, si avrà egli come residuo della prima divisione. Onde, facendosi passaggio alla seconda, si dividerà 34 per 5, e siccome è 6 il

```
345354       5
30         -----
------     69070
 45
 45
----
0035
  35
------
 004
```

quoziente di questa seconda divisione, così si ritroverà essere 4 il suo residuo. Quindi, apposto a questo residuo il seguente carattere 5, si dividerà poscia 45 per 5, che darà 9 per quoziente. E poicchè niente vi rimane, dovrà dividersi in appresso il seguente carattere 3 per 5; ma non potendosi ciò fare, si scriverà o sotto la linea come suo quoziente, ed a quel 3 come suo residuo si apporrà l'altro carattere 5, che segue. Si dividerà adunque dipoi 35 per 5, che darà 7 per quoziente. E perchè neppure da questa divisione deriva residuo, si dividerà finalmente il rimanente carattere 4 per 5; e non potendo aver luogo una tal divisione, dovrà scriversi o sotto la linea come quoziente di essa. Con che il totale quoziente della divisione proposta sarà 69070, e quel 4, che non si è potuto dividere, dovrà aversi come residuo della medesima.

103. Le medesime regole debbono osservarsi eziandio, quantevolte trattasi di dividere un numero composto per un'altro numero composto; e la sola difficoltà, che s'incontra in quest'altro caso, dipende da ciò, che per essere composto il divisore, non è egli così facile di determinare il giusto quoziente di ciascuna divisione parziale che bisogna fare. Lo determineremo intanto, con paragonare separatamente i caratteri del di-

visore con quei del numero, che dee dividersi nella parzial divisione, di cui si tratta, e con fare in modo, che ciascuno ricavi dal suo corrispondente un medesimo quoziente: dimodocchè con questo artificio risolveremo quella parzial divisione in altre più parziali, che si faranno con divisori semplici; onde si è, che del residuo di ciascheduna di esse debba tenersi conto nell' altra, che segue.

104. Fingasi per ragion di esempio, che in una parzial divisione debba dividersi 79 per 25. Per determinare il giusto suo quoziente, dividasi primieramente 7 per 2; e siccome il quoziente, che ne risulta, è 3, così dal 7 diviso rimarrà 1, che farà 19 col 9, che segue; onde perchè 19 dividendosi per l'altro carattere 5 del divisore può dare ancora 3, sarà 3 il giusto quoziente di 79 diviso per 25. Per lo contrario poi se in una parzial divisione dovesse dividersi 79 per 28, egli è vero, che 7 diviso per 2 dà 3, ma 19 dividendosi per 8 non può dare ancora 3; perlocchè non sarà 3 il giusto quoziente di 79 diviso per 28, ma dovrà quello scemarsi, ed in vece di 3 prendersi 2.

105. Fingasi ancora, che in una parzial divisione debba dividersi 948 per 236. Dividasi primieramente 9 per 2. E siccome è 4 il quoziente, che si ritrova; così dal 9 diviso rimarrà 1, il quale residuo col 4, che segue, fa 14. E poicchè con dividersi 14 per 3, può aversi ancora 4 per quoziente; ed il residuo 2 col rimanente carattere 8 fa 28, che dividendosi per 6 similmente può dare 4, sarà questo 4 il giusto quoziente di 948 diviso per 236. Al contrario poi se in una parzial divisione bisognasse dividere 948 per 239, egli è vero, che si ha 4 con dividersi tanto 9 per 2, quanto 14 per 3, ma dividendosi finalmente 28 per 9, non può aversi l'istesso 4; onde non sarà 4 il giusto quoziente di 948 diviso per 239, ma dovrà quello scemarsi, ed in vece di 4 prendersi 3.

106. Or

106. Or siccome in ogni parzial divisione il dividendo non dee essere minore del divisore, così può avvenire talvolta, che egli abbia un carattere di più per rapporto al divisore; ed in questo caso nel paragonarsi i caratteri dell' uno colli caratteri dell' altro, e farsi le divisioni più parziali, bisogna nella prima di queste divisioni impiegare quel carattere di più, che ritrovasi nel dividendo. Così, se in una parzial divisione dovesse dividersi 325 per 79, già non v'ha dubbio, che prima debba cercarsi il quoziente di 32 diviso per 7, il quale è 4, ed indi vedersi, se l'istesso quoziente 4 può ricavarsi ancora dalla divisione di 45 per 9. Ma se mai in una parzial divisione bisognasse dividere 325 per 38, pure dovrà prima dividersi 32 per 3, ed indi ciò che rimane per 8.

107. Quindi, per determinare il giusto quoziente di una parzial divisione, non sempre basterà scemare di una unità quel primo, che s'incontra, e che vedesi non poter aver luogo da per tutto, ma bisognerà talvolta, che egli si scemi di due, o più unità. Così dovendosi in una parzial divisione dividere 192 per 28, si ritroverà nella prima ricerca, che 19 diviso per 2 debba dare 9 per quoziente, ed 1 per residuo; ma che dividendosi 12 per 8, non possa aversi l'istesso quoziente 9. Si scemerà adunque il 9 di 1, e si dirà, che 19 diviso per 2 debba dare 8 per quoziente, e 3 per residuo; ma dividendosi 32 per 8 nè pure potrà aversi il medesimo quoziente 8. Quindi si scemerà l'8 ancora di 1, e si dirà, che 19 diviso per 2 debba dare 7 per quoziente, e 5 per residuo; ma con dividersi 52 per 8 nè tampoco potrà aversi quel 7. Onde bisognerà scemare il 7 eziandio di 1, e così si giungerà finalmente al giusto quoziente, che è 6.

108. Nè possiamo, per evitare una ricerca così penosa, tenerci al basso, e prendere un quoziente, che sia più tosto minore del giusto, che maggiore; per la ragione, che non meno si pecca prendendosi un quoziente minore, che se si prendesse

deſſe un quoziente maggiore. L'uno, e l'altro errore però ſi renderà a noi noto, qualora per determinare il reſiduo di quella ſteſſa parzial diviſione, di cui ſi tratta, ſi moltiplicherà il quoziente preſo per lo diviſore, e ſi toglierà il prodotto da queltanto è ſtato diviſo. Imperocchè, ſiccome eſſendo preſo un quoziente maggiore del giuſto, non potrà farſi una tal ſottrazione; così per lo contrario eſſendoſi preſo minore, ſi ritroverà un reſiduo maggiore del diviſore, il quale perciò potendoſi di nuovo dividere per lo ſteſſo diviſore, ci darà a divedere, che il quoziente preſo, per ridurſi al giuſto, debba eſſere aumentato di qualche unità.

209. Premeſſe tali coſe, debbaſi ora dividere il numero compoſto 244147 per l'altro 46 ancora

```
244147    | 46
230       |------
------    | 5307
 141
 138
 ------
   347
   322
   ------
    25
```

compoſto. Poicchè nè 2, nè 24 può dividerſi per 46, dovrà prenderſi per la prima diviſione 244; nè per gli due caratteri, che ſi prendono di più, dovranno porſi due zeri ſotto la linea, poicchè la poſizione di eſſi niente aumenta il quoziente, che ſi cerca. Dividaſi adunque 244 per 46; ed eſſendo 5 il giuſto quoziente, pongaſi 5 ſotto la linea, ed indi da 244 tolgaſi 230, che è il prodotto di 46 per 5. Quindi rimanendo 14, che coll'altro carattere 1 fa 141, dividaſi poſcia 141 per 46; ed eſſendo 3 il giuſto quoziente, pongaſi 3 ſotto la linea preſſo al 5 di prima, e da 141 tolgaſi 138, che è il prodotto di 46 per 3. Il reſiduo intanto quì ritrovaſi eſſere 3, il quale coll'altro carattere 4 dà 34, che non può dividerſi per 46; onde per

per quest' altra divisione si porrà o sotto la linea come suo quoziente, e si avrà 34 come suo residuo. Finalmente, dopo essersi apposto al 34 il rimanente carattere 7, dividasi 347 per 46; e si ritroverà essere 7 il quoziente di quest' ultima divisione, e 25 il suo residuo. Con che il quoziente totale della divisione proposta sarà 5307, e quell' ultimo residuo 25 sarà residuo ancora della stessa divisione.

110. Debbasi inoltre dividere il numero composto 26894789 per 895; che similmente è un numero composto. Poicchè nè 2, nè 26, nè 268 può

```
26894789    | 895
2685        |------
-----       | 30050
 4478
 4475
 ----
   39
```

dividersi per 895, bisognerà prendere 2689 per la prima divisione; ed essendo 3 il giusto quoziente di essa, pongasi 3 sotto la linea, e da 2689 tolgasi 2685, che è il prodotto di 895 per 3. Rimarrà adunque 4, a cui dovranno apporsi tre caratteri, per potersi avere un numero divisibile per 895; onde per le due divisioni parziali, che dovrebbero farsi colli primi due caratteri, bisognerà scrivere come quozienti di esse due zeri sotto la linea presso al 3 di prima, ed indi si dividerà 4478 per 895. E poicchè il giusto quoziente di questa divisione è 5, scrivasi 5 sotto la linea, e da 4478 tolgasi 4475, che è il prodotto di 895 per 5. Quindi avendosi per residuo 3, che col rimanente carattere 9 dà 39, dovrà dividersi finalmente 39 per 895; ma non potendosi fare una tal divisione, si scriverà ancora 0 sotto la linea come suo quoziente; e perciò sarà 30050 il quoziente totale della divisione proposta, e 39 il suo residuo.

111. Quest' operazione non meno, che ciascu-

 na

na delle altre tre precedenti, dipende dallo stabilimento fatto dagli Arimmetici intorno al valore locale de' caratteri, che debba aumentarsi sempre nel decuplo (34). In effetto nell' ultimo esempio, quando si fa la prima divisione parziale, si dividono propriamente 2689 diecine di migliaja per 895, e perciò il quoziente 3 di detta divisione dee disegnare ancora altrettante diecine di migliaja. E così parimente, quando si viene all' altra divisione parziale, effettivamente si dividono 4478 diecine per 895, onde il quoziente di essa 5 dee disegnare eziandio altrettante diecine. Quindi nel quoziente totale il 5 dee occupare il secondo luogo, ed il 3 dee riporsi nel quinto; con che gli altri luoghi vacui debbono per necessità riempirsi con altrettanti zeri: i quali tutta volta sono stati da noi considerati, come quozienti di quelle divisioni parziali, che non possono farsi.

112. Del rimanente, essendo la moltiplicazione, e la divisione operazioni interamente opposte tra loro (92), egli è facile ad intendersi, che il proprio mezzo per compruovare la divisione sia la moltiplicazione. Moltiplichisi adunque il quoziente ritrovato per lo divisore, e se il prodotto insieme col residuo della divisione uguagli il dividendo, sarà questa uguaglianza segno indubbitato di non essersi errato. Così nell' ultimo esempio, moltiplicandosi il quoziente 30050 per lo divisore 895, ed aggiungendosi al prodotto 26894750 il residuo 39, si avrà per somma 26894789, che è il dividendo medesimo. Ma dopo averci renduta familiare la divisione, potremo al contrario per mezzo di essa esaminare la moltiplicazione, cioè con dividere il prodotto per uno de' numeri, che sono stati moltiplicati tra loro, e con vedere, se il quoziente di una tal divisione si ritrovi eguale all' altro numero.

113. Colla detrazione del 9 si potrebbe ancora esaminare la divisione, e dipende tal' esame dallo stesso principio, cioè che il prodotto del quoziente per lo divisore insieme col residuo debba essere

egua-

eguale al dividendo. Tolgansi adunque tutti i 9, così dal quoziente, come dal divisore, indi al prodotto de' loro rispettivi residui aggiungasi il residuo della divisione medesima; e se con togliersi i 9 da questa somma, resti quello stesso, che rimane, togliendosi i 9 dal dividendo, saremo tanto quanto sicuri di non essersi errato nella divisione. Così nell' ultimo esempio togliendo i 9 dal quoziente, e dal divisore, ritroveremo, che rimangono 8, e 4. Quindi, aggiungendo al loro prodotto 32 il residuo della divisione 39, avremo per somma 71, da cui colla detrazione del 9 rimane 8. E poichè l' istesso 8 resta ancora, togliendosi i 9 dal dividendo; dobbiam conchiudere, che non siasi ivi commesso errore.

## CAPITOLO II.

*Dell' Algorismo de' numeri rotti.*

114. La divisione de' numeri interi ha dato motivo agli Arimmetici di considerare un' altra spezie de' numeri, che chiamansi comunemente frazioni, minuzie, ovvero numeri rotti. Ed in vero, se il dividendo non fosse mai minore del divisore, e la divisione potesse sempre farsi esattamente, e senza residuo, la considerazione de' rotti sarebbe affatto inutile; ma rendono necessaria, ed indispensabile la loro teoria appunto i due casi opposti, che possono avvenire nella divisione de' numeri interi, ed i quali a ben considerarsi si riducono sempre a quello di non potersi un numero minore dividere per un' altro maggiore. Tratteremo adunque in quest' altro Capitolo dell' Algorismo de' numeri rotti, ove in conseguenza faremo vedere, come a riguardo di essi debbano istituirsi quelle stesse quattro operazioni, cioè l' addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione.

115. Comunemente si fa dipendere la teoria de' rotti dalla dottrina delle proporzioni, e credesi non potersi la prima dimostrare senza la seconda

Ma io dubito, che in farsi ciò, non si cada in quel difetto, che suol chiamarsi circolo vizioso; per la ragione, che senza l'anticipata conoscenza del calcolo de' rotti non può intendersi perfettamente la dottrina delle proporzioni. Sarà adunque nostra cura di dare tal'aspetto alla teoria de' rotti, che si possa di essa render ragione, senza che affatto si abbia idea di proporzione; e perciò prima di ogni altra cosa porremo tutto lo studio in dare una nozione chiara, e distinta de' numeri rotti, dalla quale in conseguenza procureremo naturalmente dedurre quei teoremi, sù cui si appoggiano le riduzioni necessarie per l'Algorismo de' medesimi numeri.

## §. I.

### *Della nozione de' rotti, e delle loro riduzioni.*

116. Siccome le unità debbonsi avere come parti di ogni numero intero, così non per altra ragione un numero minore è incapace di potersi dividere per un'altro maggiore, se non per la corta moltitudine di parti, ch'egli racchiude. Quindi, per rendere possibile ogni qualunque divisione de' numeri interi, si è pensato dagli Arimmetici di aumentare il numero delle parti del dividendo, con partire ciascuna sua unità in molte altre parti eguali; e conforme con questo artificio potrà facilmente farsi la divisione, così il quoziente di essa si dirà essere numero rotto. Per ragion di esempio il 4 non può dividersi per 5, ma con partirsi ciascuna sua unità in cinque parti uguali, conterrà egli venti di queste parti, e perciò siccome la moltitudine di esse può dividersi per 5, così il quoziente, che dee contenere quattro di quelle stesse parti, si chiamerà numero rotto.

117. Dicesi adunque numero rotto una, o più di quelle parti, nelle quali s'intende divisa l'unità; onde per la sua espressione debbono essere impiegati due numeri interi: cioè uno, che ci additi,

diti, in quante parti è stata divisa l'unità; e l'altro, che ci dimostri quante di quelle parti si contengono nel numero rotto. Egli è intanto da sapersi, che di questi due numeri interi il primo si appella denominatore, in quanto che denomina la spezie delle parti contenute nel rotto; e l'altro numeratore, per la ragione, che numera la moltitudine delle medesime parti. Ma siccome nel scriverli si frappone fra essi una lineetta orizontale, e collocasi il denominatore sotto quella, ed il numeratore sopra; così nel profferirli prima si enuncia il numeratore a guisa di un numero intero, ed indi il denominatore in modo tale, che dinomini effettivamente le parti del rotto.

118. Così dividendosi l'unità in cinque parti eguali, e prendendosene quattro, di già si avrà un numero rotto; ma per poterlo esprimere, abbisogna impiegare i due numeri interi 5, e 4, de' quali il primo 5 dicesi denominatore del rotto, e l'altro 4 suo numeratore. La maniera intanto di scriverli è la seguente $\frac{4}{5}$, e con essi si enuncierà il rotto così, quattro quinti, cioè a dire quattro quinte parti dell'unità. Or della stessa maniera $\frac{3}{7}$ sarà un'altro rotto, il quale contenendo tre delle sette parti, nelle quali s'intende divisa l'unità, si enuncierà così, tre settimi, cioè a dire tre settime parti dell'unità. Ed ancora $\frac{8}{15}$ sarà numero parimente rotto, il quale perchè contiene otto delle quindici parti, nelle quali si suppone divisa l'unità, dovrà profferirsi in questa maniera, otto quindicesimi, cioè a dire otto quindicesime parti dell'unità.

119. Quantunque i rotti, che risultano dalla divisione de' numeri interi, siano sempre minori dell'unità; nientedimeno, intendendo per rotto ogni numero espresso con numeratore, e denominatore, egli è chiaro potersi dare rotti di tre spezie: cioè minori dell'unità, eguali all'unità, e maggiori ancora dell'unità; delle quali tre spezie dovrà giudicarsi, secondocchè il numeratore è mi-

 no-

nore, eguale, o maggiore del denominatore. Ed in vero, eſſendo il numeratore minore del denominatore, ſegno ſarà, che non ſi ſono preſe tutte le parti dell' unità; onde per la mancanza di alcune di eſſe ſarà il rotto minore dell' unità. Ma qualora il numeratore è eguale al denominatore, conterrà il rotto tutte le parti dell' unità; e perciò dovrà egli eſſerle eguale. E finalmente, eſſendo il numeratore maggiore del denominatore, ſi conterranno nel rotto più parti di quelle, nelle quali ſi è diviſa l' unità; e pertanto il rotto dovrà eſſere maggiore di quella.

120. Il rotto adunque $\frac{4}{7}$ dee giudicarſi minore dell' unità, poichè eſſendo queſta diviſa in ſette parti eguali, non più di quattro ne contiene quel rotto, dimodocchè ne mancano tre altre per compiere l' intero loro numero. Ma ſe poi ſi aveſſe il rotto $\frac{7}{7}$, queſto dovrebbe ſtimarſi eguale all'unità; per la ragione, che ſiccome l' unità ſi concepiſce diviſa in ſette parti eguali, così tutte ſette quelle parti ſi veggono racchiuſe nel rotto. Ed in fine queſt' altro rotto $\frac{10}{7}$ dovrà averſi come maggiore dell' unità; poichè in eſſe ſi ſono preſe non ſolo le ſette parti, nelle quali ſi è diviſa l' unità, ma tre altre ancora di più; onde ſiccome $\frac{7}{7}$ è l' iſteſſo, che $1$, così $\frac{10}{7}$ ſarà $1$, e $\frac{3}{7}$. Potrebbe intanto un rotto contenere non una, ma più unità; come ſarebbe $\frac{21}{7}$, il quale vale l' iſteſſo, che $3$; o pure $\frac{45}{7}$, il di cui valore aſcende a $6$, e $\frac{3}{7}$.

121. Nè poi debbono farci difficoltà veruna queſti rotti, che ſono uguali, o maggiori dell' unità; poicchè, ſe ſi voglia attentamente riflettere, ogni numero intero di ſua natura è fornito di un denominatore, ed in conſeguenza ancora ſenza partire le ſue unità dee riguardarſi come numero rotto. In effetto, quando per profferire queſto numero intero 3 diciamo tre, tacitamente s' intendono tre unità; onde denominatore di quel numero intero ſarà

sarà l'istessa unità; e pertanto la sua vera espressione dovrebbe essere propriamente $\frac{1}{1}$. L'unità adunque dee aversi come denominatore di tutti i numeri interi possibili; e se in quelli non vedesi espressa, ciò avviene appunto per essere ella denominatore loro comune. Ed essendo così, dobbiamo conchiudere, che quest'altra spezie de' numeri, che si appellano rotti, considerata secondo la nozione sua generale, racchiuda ancora gli stessi numeri interi, che sono i primi a considerarsi in questa scienza.

122. Dalla nozione data del numero rotto egli è facile a dedurne la verità di due teoremi. Il primo si è; che non debba alterarsi il valore di un rotto, con moltiplicare così il numeratore, come il denominatore di esso per un medesimo numero intero. In effetto $\frac{2}{3}$ contiene due delle tre parti, nelle quali s'intende divisa l'unità; onde partendosi ciascuna di quelle in altre due, saranno sei le parti dell'unità, e quattro le parti prese; e perciò $\frac{4}{6}$ non sarà diverso da $\frac{2}{3}$. Similmente $\frac{3}{4}$ contiene tre delle quattro parti, nelle quali si suppone divisa l'unità; onde con partirsi ciascuna di quelle in altre cinque parti eguali, saranno venti le parti dell'unità, e quindici le parti prese; con che $\frac{15}{20}$ non sarà diverso da $\frac{3}{4}$. E della stessa maniera si dimostrerà, che qualunque sia il numero rotto, e qualunque il numero intero, per cui si moltiplica tanto il numeratore, quanto il denominatore, debba sempre rimanere il medesimo numero rotto.

123. L'altro teorema si è, che non debba alterarsi il valore di un rotto, con dividere così il numeratore, come il denominatore di esso per un medesimo numero intero, che sia esatto loro divisore. In effetto $\frac{4}{6}$ contiene quattro delle sei parti, nelle quali s'intende divisa l'unità; onde congiungendole a due a due, cosicchè di due se ne formi una, saranno tre le parti dell'unità, e due le parti pre-

ſe; e pertanto $\frac{5}{3}$ non ſarà diverſo da $\frac{4}{6}$. Similmente $\frac{15}{20}$ contiene quindici delle venti parti, nelle quali ſi ſuppone diviſa l'unità; onde congiungendole a cinque a cinque, coſicchè di cinque ſe ne formi una, ſaranno quattro le parti dell'unità, e tre le parti preſe; con che $\frac{3}{4}$ non ſarà diverſo da $\frac{15}{20}$. E della ſteſſa maniera ſi dimoſtrerà, che qualunque ſia il numero rotto, e qualunque il numero intero, per cui eſattamente ſi divide tanto il numeratore, quanto il denominatore, debba ſempre rimanere il medeſimo numero rotto.

124. Or ſiccome per l'Algoriſmo de' numeri rotti ſi ha biſogno di alcune riduzioni, così la maniera di eſeguirle dipende dalli due riferiti teoremi. Ed in quanto alla prima, che diceſi riduzione d'intero a rotto, ella c'inſegna, come un dato numero intero poſſa ridurſi ad un rotto, che abbia un dato denominatore, ſenza alterare il ſuo valore. Si fa una tal riduzione con moltiplicare l'intero dato per lo dato denominatore, e con ſottoſcrivere al prodotto l'iſteſſo denominatore dato. Così volendoſi l'intero 3 ridurre a quinti, cioè ad un rotto, che li ſia eguale, ed abbia 5 per ſuo denominatore, ſi moltiplicherà 3 per 5, ed al prodotto 15 ſottoſcrivendoſi l'iſteſſo 5, ſarà $\frac{15}{5}$ il rotto, che ſi dimanda. E la ragione è chiara, poicchè ſiccome per l'indole ſteſſa de' numeri interi 3 ſignifica lo ſteſſo, che $\frac{3}{1}$ (121), così per lo primo teorema $\frac{3}{1}$ non è diverſo da $\frac{15}{5}$ (122).

125. La ſeconda riduzione diceſi al contrario riduzione di rotto ad intero; ed apprendiamo propriamente da eſſa, come da un numero rotto maggiore dell'unità poſſa ricavarſi il numero intero, che in quello ſi contiene. Si fa queſt' altra riduzione con dividerſi il numeratore del rotto dato per lo denominatore del medeſimo; poicchè il quoziente di queſta diviſione ſarà l'intero, che ſi dimanda. Così volendoſi ritrovare l'intero, che ſi con-

contiene nel rotto $\frac{15}{5}$ maggiore dell'unità, si dividerà il numeratore 15 per lo denominatore 5; e risultando da questa divisione il quoziente 3, sarà 3 l'intero contenuto nel rotto proposto. E la ragione di ciò similmente è chiara; poicchè siccome per lo secondo teorema $\frac{15}{5}$ non è diverso da $\frac{3}{1}$ (123), così per l'indole medesima de' numeri interi $\frac{3}{1}$ è l'istesso, che 3 (121).

126. Tal volta potrebbe avvenire, che nel dividere il numeratore del rotto per lo suo denominatore non possa farsi la divisione esattamente, e senza residuo; onde in questo caso egli è da sapersi, che siccome il quoziente della divisione dee darci l'intero contenuto in quel rotto, così il residuo ci darà le parti dell'unità, che nel medesimo rotto vi sono d'avanzo. Per ragion di esempio, se mai il rotto proposto sia $\frac{17}{5}$, egli è chiaro, che 17 diviso per 5 dà 3 per quoziente, e 2 per residuo; onde nel rotto $\frac{17}{5}$ non solo si conterrà l'intero 3, ma vi saranno di più due quinte parti dell'unità, dimodocchè $\frac{17}{5}$ sarà lo stesso, che 3 e $\frac{2}{5}$. Qual cosa similmente è chiara; poichè siccome il rotto proposto $\frac{17}{5}$ può risolversi in quest' altri due $\frac{15}{5}$, e $\frac{2}{5}$, così riducendosi per la regola data il primo di essi $\frac{15}{5}$ all'intero 3, sarà 3 e $\frac{2}{5}$ il valore di $\frac{17}{5}$.

127. La terza riduzione ci apprende, come a due, o più rotti, che anno denominatori diversi, può darsi un' istesso denominatore, senzacchè si alteri il loro valore; onde si è, che si appella riduzione de' rotti alla stessa dinominazione. Il metodo di farla è questo, si moltiplichi primieramente il numeratore di ciascuno rotto per gli denominatori degli altri, indi si moltiplichino tutti i dinominatori insieme, e siccome i primi prodotti saranno

no i numeratori delli nuovi rotti, che ſi cercano, così l' altro prodotto ſarà il denominatore loro comune. La ragione poi della regola dee dedurſi dal primo teorema (122), in quantocchè con quelle tali moltiplicazioni così il numeratore, come il denominatore di ciaſcuno rotto viene ad eſſere moltiplicato per un medeſimo numero: cioè per lo denominatore dell' altro rotto, ſe ſono due i rotti propoſti; e per lo prodotto de' denominatori degli altri, ſe i rotti propoſti ſono più di due.

128. Debbanſi, per ragion di eſempio, ridurre alla ſteſſa denominazione i due rotti $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$. Si moltiplichi primieramente così il numeratore del primo 2 per lo denominatore del ſecondo 5; come il numeratore di queſto 4 per lo denominatore di quello 3, e ſaranno 10, e 12 i loro riſpettivi prodotti; ſi moltiplichino di poi inſieme i due denominatori 3 e 5, ed eſſendo 15 queſt' altro prodotto, ſaranno $\frac{10}{15}$, e $\frac{12}{15}$ li nuovi rotti, che ſi dimandano. E così ancora i tre rotti $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ ridotti alla ſteſſa dinominazione diverranno $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, per la ragione, che ſiccome moltiplicandoſi il numeratore di ciaſcuno di eſſi per gli denominatori degli altri, ſi anno i prodotti 40, 45, e 48, così con moltiplicare inſieme tutti tre i loro denominatori viene a produrſi 60.

129. Eſſendo due i rotti, che debbonſi ridurre alla ſteſſa dinominazione, può farſi talvolta la loro riduzione con maggior compendio. Vedaſi adunque, ſe il denominatore maggiore ſi può dividere eſattamente per l' altro minore; e ſe ciò avviene; con ritrovare il quoziente di tal diviſione, e con moltiplicare per quello tanto il denominatore minore, quanto il numeratore, che corriſponde all' iſteſſo denominatore, ſi farà la riduzione, di cui ſi tratta. Così, eſſendo $\frac{2}{3}$, e $\frac{5}{12}$ i due rotti propoſti, io ritrovo, che il denominatore maggiore 12 può eſſere diviſo eſattamente per l' altro minore

re 3; e poichè il quoziente di una tal divisione è 4, io moltiplico per questo 4, così il denominatore, come il numeratore del primo rotto $\frac{2}{3}$; e per lo primo teorema (122) non essendo egli diverso da $\frac{8}{12}$, saranno $\frac{8}{12}$, e $\frac{5}{12}$ i due rotti ridotti alla stessa dinominazione.

130. Per la quarta, ed ultima riduzione, che dicesi riduzione de' rotti a' minimi termini, conviene prima sapere, come di due numeri possa ritrovarsi la massima comune misura. Quindi egli è d'avvertirsi, che misura di un numero dicesi un' altro numero, che può dividerlo esattamente, e senza residuo. Così 3 è misura di 12, per la ragione, che 12 diviso per 3 dà esattamente 4 per quoziente; e così ancora 4 è misura di 20, poicchè il quoziente 5, che risulta dalla divisione di 20 per 4, non va accompagnato con residuo alcuno. Ma siccome secondo questa nozione ogni numero dee avere per sua misura tanto se stesso, quanto l'unità: così se mai un numero non sia capace di altra misura, egli si appella dagli Arimmetici numero primo, siccome sono i numeri 2, 3, 5, 7, 11, ed altri consimili.

131. Si vuol' avvertire ancora, che misura comune di due numeri si chiama un terzo numero, che può dividere così l'uno, come l'altro esattamente, e senza residuo. Così potendo 3 dividere con esattezza tantò 6, quanto 9, si dirà 3 essere misura comune di 6, e 9. Similmente potendosi tanto 15, quanto 20 dividere per 5, si dirà 5 essere misura comune di 15, e 20. E così ancora, perchè ciascuno delli due numeri 20, e 24 può dividersi per 4, si dirà 4 essere misura loro comune. Quindi secondo questa nozione chiara cosa si è, che l'unità debba essere misura comune di tutti i numeri; ma se mai due numeri, oltre all' unità, non abbiano altra misura comune, essi sogliono chiamarsi dagli Arimmetici numeri primi tra loro: qual cosa potrebbe avvenire, ancorchè nessuno delli due numeri fosse primo di sua natura.

132. Fi-

132. Finalmente egli è d'avvertirsi, che siccome due numeri possono avere talvolta molte misure comuni, così la maggiore di tutte si appella massima loro comune misura. Per ragion di esempio i due numeri 18, e 30, oltre all'unità, anno per misura loro comune tre altri numeri, cioè 2, 3, e 6; onde il numero 6, che è maggiore di tutti, si dice essere la massima comune misura delli due numeri 18, e 30. E poichè ogni numero è misura di se medesimo, chiara cosa si è, che se vi sono due numeri, ed il minore di essi sia misura dell'altro maggiore, quello stesso minore debba aversi come massima misura comune di amendue. Così 6 è misura di 12, onde l'istesso 6 sarà massima comune misura di 6, e 12. Similmente, essendo 18 misura di 54, sarà l'istesso 18 massima misura comune di 18, e 54.

133. Or siccome di questa massima comune misura si ha bisogno per la riduzione de'rotti a'minimi termini, così ella si ritrova con dividere primieramente il maggiore de'due numeri dati per l'altro minore, indi il minore per lo residuo di quella divisione, di poi quel residuo per lo residuo della seconda divisione, in appresso quest'altro residuo per lo residuo della terza, e così consecutivamente persino a che si venga ad una divisione, che non lasci verun residuo; poichè l'ultimo residuo sarà la massima comune misura de' due numeri dati: tantocchè se quell' ultimo residuo sia l'unità, saranno i due numeri primi tra loro, ed oltre all'unità non avranno altra misura comune. Ma se mai la stessa prima divisione possa farsi esattemente, e senza residuo; in tal caso il minore delli due numeri sarà la massima loro comune misura.

134. Siano a cagion di esempio 100, e 15 i due numeri dati. Dividasi primieramente 100 per 15, e si avrà 10 per residuo; dividasi poscia 15 per 10, ed il secondo residuo sarà 5; dividasi in appresso 10 per 5, e la divisione si farà esattamente, e senz'altro residuo; onde il secondo residuo

5 sa-

5 sarà la massima comune misura di 100, e 15. Siano ancora 31, e 7 i due numeri proposti: Con dividere 31 per 7 rimane 3, con dividere 7 per 3 rimane 1, e con dividere 3 per 1, non si ha altro residuo; quindi sarà 1 la massima comune misura di 31, e 7; e pertanto questi due numeri saranno primi tra loro. Siano finalmente 18, e 6 i due numeri dati. E poichè con dividere 18 per 6, non si ha residuo alcuno, sarà l' istesso 6 la massima comune misura di 18, e 6.

135. Per quanto alla ragione della riferita operazione, dipende ella da due principj. Il primo si è, che se un numero, come 5, sia misura di un' altro numero, come di 10; debba egli essere misura altresì di ogn' altro numero, che sia misurato da 10, come di 20, 30, 40, 50, &c. L' altro si è, che se un numero, come 5, sia misura di due altri numeri, come di 30, e 20; debba egli essere misura parimente tanto della loro somma 50, quanto della loro differenza 10. Imperocchè, siccome con questi principj vedesi chiaramente, che con fare quelle consecutive divisioni, debba l' ultimo residuo essere misura comune non meno de' residui precedenti, che delli due numeri dati; così per mezzo de' medesimi facilmente si proverà, che ogn' altra misura comune degli stessi due dati numeri debba misurare altresì l' ultimo residuo, ed in conseguenza essere o eguale a quello, o pure minore.

136. Dimostrato adunque, come possa ritrovarsi la massima comune misura di due numeri dati, facilmente ora potrà eseguirsi la riduzione de' rotti a' minimi termini; la quale consiste propriamente in ritrovare la più semplice espressione di un rotto dato. Si ritrovi perciò la massima comune misura di que' due numeri, che sono denominatore, e numeratore del rotto proposto; e con dividere ciascuno di essi per quella massima loro misura comune, si avrà la più semplice espressione del medesimo rotto. Così posto, che il rotto sia $\frac{15}{100}$, sarà 5 la massima comune misura di 100, e 15;

deffe un quoziente maggiore. L'uno, e l'altro errore però si renderà a noi noto, qualora per determinare il residuo di quella stessa parzial divisione, di cui si tratta, si moltiplicherà il quoziente preso per lo divisore, e si toglierà il prodotto da quel tanto è stato diviso. Imperocchè, siccome essendo preso un quoziente maggiore del giusto, non potrà farsi una tal sottrazione; così per lo contrario essendosi preso minore, si ritroverà un residuo maggiore del divisore, il quale perciò potendosi di nuovo dividere per lo stesso divisore, ci darà a divedere, che il quoziente preso, per ridursi al giusto, debba essere aumentato di qualche unità.

209. Premesse tali cose, debbasi ora dividere il numero composto 244147 per l'altro 46 ancora

```
244147  | 46
230     |------
------  | 5307
 141
 138
------
   347
   322
------
    25
```

composto. Poicchè nè 2, nè 24 può dividersi per 46, dovrà prendersi per la prima divisione 244; nè per gli due caratteri, che si prendono di più, dovranno porsi due zeri sotto la linea, poicchè la posizione di essi niente aumenta il quoziente, che si cerca. Dividasi adunque 244 per 46; ed essendo 5 il giusto quoziente, pongasi 5 sotto la linea, ed indi da 244 tolgasi 230, che è il prodotto di 46 per 5. Quindi rimanendo 14, che coll'altro carattere 1 fa 141, dividasi poscia 141 per 46; ed essendo 3 il giusto quoziente, pongasi 3 sotto la linea presso al 5 di prima, e da 141 tolgasi 138, che è il prodotto di 46 per 3. Il residuo intanto quì ritrovasi essere 3, il quale coll'altro carattere 4 dà 34, che non può dividersi per 46; onde per

per quest' altra divisione si porrà o sotto la linea come suo quoziente, e si avrà 34 come suo residuo. Finalmente, dopo essersi apposto al 34 il rimanente carattere 7, dividasi 347 per 46; e si ritroverà essere 7 il quoziente di quest' ultima divisione, e 25 il suo residuo. Con che il quoziente totale della divisione proposta sarà 5307, e quell' ultimo residuo 25 sarà residuo ancora della stessa divisione.

110. Debbasi inoltre dividere il numero composto 26894789 per 895; che similmente è un numero composto. Poicchè nè 2, nè 26, nè 268 può

```
26894789 | 895
2685     |------
-----    | 30050
 4478
 4475
 ----
   39
```

dividersi per 895, bisognerà prendere 2689 per la prima divisione; ed essendo 3 il giusto quoziente di essa, pongasi 3 sotto la linea, e da 2689 tolgasi 2685, che è il prodotto di 895 per 3. Rimarrà adunque 4, a cui dovranno apporsi tre caratteri, per potersi avere un numero divisibile per 895; onde per le due divisioni parziali, che dovrebbero farsi colli primi due caratteri, bisognerà scrivere come quozienti di esse due zeri sotto la linea presso al 3 di prima, ed indi si dividerà 4478 per 895. E poicchè il giusto quoziente di questa divisione è 5, scrivasi 5 sotto la linea, e da 4478 tolgasi 4475, che è il prodotto di 895 per 5. Quindi avendosi per residuo 3, che col rimanente carattere 9 dà 39, dovrà dividersi finalmente 39 per 895; ma non potendosi fare una tal divisione, si scriverà ancora o sotto la linea come suo quoziente; e perciò sarà 30050 il quoziente totale della divisione proposta, e 39 il suo residuo.

111. Quest' operazione non meno, che ciascu-

 na

na delle altre tre precedenti, dipende dallo stabilimento fatto dagli Arimmetici intorno al valore locale de' caratteri, che debba aumentarsi sempre nel decuplo (34). In effetto nell' ultimo esempio, quando si fa la prima divisione parziale, si dividono propriamente 2689 diecine di migliaja per 895, e perciò il quoziente 3 di detta divisione dee disegnare ancora altrettante diecine di migliaja. E così parimente, quando si viene all' altra divisione parziale, effettivamente si dividono 4478 diecine per 895, onde il quoziente di essa 5 dee disegnare eziandio altrettante diecine. Quindi nel quoziente totale il 5 dee occupare il secondo luogo, ed il 3 dee riporsi nel quinto; con che gli altri luoghi vacui debbono per necessità riempirsi con altrettanti zeri: i quali tutta volta sono stati da noi considerati, come quozienti di quelle divisioni parziali, che non possono farsi.

112. Del rimanente, essendo la moltiplicazione, e la divisione operazioni interamente opposte tra loro (92), egli è facile ad intendersi, che il proprio mezzo per compruovare la divisione sia la moltiplicazione. Moltiplichisi adunque il quoziente ritrovato per lo divisore, e se il prodotto insieme col residuo della divisione uguagli il dividendo, sarà questa uguaglianza segno indubbitato di non essersi errato. Così nell' ultimo esempio, moltiplicandosi il quoziente 30050 per lo divisore 895, ed aggiungendosi al prodotto 26894750 il residuo 39, si avrà per somma 26894789, che è il dividendo medesimo. Ma dopo averci renduta familiare la divisione, potremo al contrario per mezzo di essa esaminare la moltiplicazione, cioè con dividere il prodotto per uno de' numeri, che sono stati moltiplicati tra loro, e con vedere, se il quoziente di una tal divisione si ritrovi eguale all' altro numero.

113. Colla detrazione del 9 si potrebbe ancora esaminare la divisione, e dipende tal' esame dallo stesso principio, cioè che il prodotto del quoziente per lo divisore insieme col residuo debba essere egua-

eguale al dividendo. Tolgansi adunque tutti i 9, così dal quoziente, come dal divisore, indi al prodotto de' loro rispettivi residui aggiungasi il residuo della divisione medesima; e se con togliersi i 9 da questa somma, resti quello stesso, che rimane, togliendosi i 9 dal dividendo, saremo tanto quanto sicuri di non essersi errato nella divisione. Così nell' ultimo esempio togliendo i 9 dal quoziente, e dal divisore, ritroveremo, che rimangono 8, e 4. Quindi, aggiungendo al loro prodotto 32 il residuo della divisione 39, avremo per somma 71, da cui colla detrazione del 9 rimane 8. E poichè l' istesso 8 resta ancora, togliendosi i 9 dal dividendo; dobbiam conchiudere, che non siasi ivi commesso errore.

## CAPITOLO II.

*Dell' Algorismo de' numeri rotti.*

114. LA divisione de' numeri interi ha dato motivo agli Arimmetici di considerare un' altra spezie de' numeri, che chiamansi comunemente frazioni, minuzie, ovvero numeri rotti. Ed in vero, se il dividendo non fosse mai minore del divisore, e la divisione potesse sempre farsi esattamente, e senza residuo, la considerazione de' rotti sarebbe affatto inutile; ma rendono necessaria, ed indispensabile la loro teoria appunto i due casi opposti, che possono avvenire nella divisione de' numeri interi, ed i quali a ben considerarsi si riducono sempre a quello di non potersi un numero minore dividere per un' altro maggiore. Tratteremo adunque in quest' altro Capitolo dell' Algorismo de' numeri rotti, ove in conseguenza faremo vedere, come a riguardo di essi debbano istituirsi quelle stesse quattro operazioni, cioè l' addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione.

115. Comunemente si fa dipendere la teoria de' rotti dalla dottrina delle proporzioni, e credesi non potersi la prima dimostrare senza la seconda.

Ma io dubito, che in farsi ciò, non si cada in quel difetto, che suol chiamarsi circolo vizioso; per la ragione, che senza l'anticipata conoscenza del calcolo de' rotti non può intendersi perfettamente la dottrina delle proporzioni. Sarà adunque nostra cura di dare tal' aspetto alla teoria de' rotti, che si possa di essa render ragione, senza che affatto si abbia idea di proporzione; e perciò prima di ogni altra cosa porremo tutto lo studio in dare una nozione chiara, e distinta de' numeri rotti, dalla quale in conseguenza procureremo naturalmente dedurre quei teoremi, sù cui si appoggiano le riduzioni necessarie per l'Algorismo de' medesimi numeri.

## §. I.

### *Della nozione de' rotti, e delle loro riduzioni.*

116. Siccome le unità debbonsi avere come parti di ogni numero intero, così non per altra ragione un numero minore è incapace di potersi dividere per un' altro maggiore, se non per la corta moltitudine di parti, ch' egli racchiude. Quindi, per rendere possibile ogni qualunque divisione de' numeri interi, si è pensato dagli Arimmetici di aumentare il numero delle parti del dividendo, con partire ciascuna sua unità in molte altre parti eguali; e conforme con questo artificio potrà facilmente farsi la divisione, così il quoziente di essa si dirà essere numero rotto. Per ragion di esempio il 4 non può dividersi per 5, ma con partirsi ciascuna sua unità in cinque parti uguali, conterrà egli venti di queste parti, e perciò siccome la moltitudine di esse può dividersi per 5, così il quoziente, che dee contenere quattro di quelle stesse parti, si chiamerà numero rotto.

117. Dicesi adunque numero rotto una, o più di quelle parti, nelle quali s' intende divisa l' unità; onde per la sua espressione debbono essere impiegati due numeri interi: cioè uno, che ci additi,

diti, in quante parti è stata divisa l'unità; e l'altro, che ci dimostri quante di quelle parti si contengono nel numero rotto. Egli è intanto da sapersi, che di questi due numeri interi il primo si appella denominatore, in quanto che denomina la spezie delle parti contenute nel rotto; e l'altro numeratore per la ragione, che numera la moltitudine delle medesime parti. Ma siccome nel scriverli si trappone fra essi una lineetta orizontale, e collocasi il denominatore sotto quella, ed il numeratore sopra; così nel profferirli prima si enuncia il numeratore a guisa di un numero intero, ed indi il denominatore in modo tale, che dinomini effettivamente le parti del rotto.

118. Così dividendosi l'unità in cinque parti eguali, e prendendosene quattro, di già si avrà un numero rotto; ma per poterlo esprimere, abbisogna impiegare i due numeri interi 5, e 4, de' quali il primo 5 dicesi denominatore del rotto, e l'altro 4 suo numeratore. La maniera intanto di scriverli è la seguente $\frac{4}{5}$, e con essi si enuncierà il rotto così, quattro quinti, cioè a dire quattro quinte parti dell'unità. Or della stessa maniera $\frac{3}{7}$ sarà un'altro rotto, il quale contenendo tre delle sette parti, nelle quali s'intende divisa l'unità, si enuncierà così, tre settimi, cioè a dire tre settime parti dell'unità. Ed ancora $\frac{8}{15}$ sarà numero parimente rotto, il quale perchè contiene otto delle quindici parti, nelle quali si suppone divisa l'unità, dovrà profferirsi in questa maniera, otto quindicesimi, cioè a dire otto quindicesime parti dell'unità.

119. Quantunque i rotti, che risultano dalla divisione de' numeri interi, siano sempre minori dell'unità; nientedimeno, intendendo per rotto ogni numero espresso con numeratore, e denominatore, egli è chiaro potersi dare rotti di tre spezie: cioè minori dell'unità, eguali all'unità, e maggiori ancora dell'unità; delle quali tre spezie dovrà giudicarsi, secondocchè il numeratore è mi-

nore, eguale, o maggiore del denominatore. Ed in vero, essendo il numeratore minore del denominatore, segno sarà, che non si sono prese tutte le parti dell' unità; onde per la mancanza di alcune di esse sarà il rotto minore dell' unità. Ma qualora il numeratore è eguale al denominatore, conterrà il rotto tutte le parti dell' unità; e perciò dovrà egli esserle eguale. E finalmente, essendo il numeratore maggiore del denominatore, si conterranno nel rotto più parti di quelle, nelle quali si è divisa l' unità; e pertanto il rotto dovrà essere maggiore di quella.

120. Il rotto adunque $\frac{4}{7}$ dee giudicarsi minore dell' unità, poichè essendo questa divisa in sette parti eguali, non più di quattro ne contiene quel rotto, dimodocchè ne mancano tre altre per compiere l' intero loro numero. Ma se poi si avesse il rotto $\frac{7}{7}$, questo dovrebbe stimarsi eguale all'unità; per la ragione, che siccome l' unità si concepisce divisa in sette parti eguali, così tutte sette quelle parti si veggono racchiuse nel rotto. Ed in fine quest' altro rotto $\frac{10}{7}$ dovrà aversi come maggiore dell' unità; poichè in esse si sono prese non solo le sette parti, nelle quali si è divisa l' unità, ma tre altre ancora di più; onde siccome $\frac{7}{7}$ è l' istesso, che $1$, così $\frac{10}{7}$ sarà $1$, e $\frac{3}{7}$. Potrebbe intanto un rotto contenere non una, ma più unità; come sarebbe $\frac{15}{5}$, il quale vale l' istesso, che $3$; o pure $\frac{45}{7}$, il di cui valore ascende a $6$, e $\frac{3}{7}$.

121. Nè poi debbono farci difficoltà veruna questi rotti, che sono uguali, o maggiori dell' unità; poicchè, se si voglia attentamente riflettere, ogni numero intero di sua natura è fornito di un denominatore, ed in conseguenza ancora senza partire le sue unità dee riguardarsi come numero rotto. In effetto, quando per profferire questo numero intero 3 diciamo tre, tacitamente s' intendono tre unità; onde denominatore di quel numero intero

sarà

sarà l' istessa unità; e pertanto la sua vera espressione dovrebbe essere propriamente $\frac{1}{1}$. L'unità adunque dee aversi come denominatore di tutti i numeri interi possibili; e se in quelli non vedesi espressa, ciò avviene appunto per essere ella denominatore loro comune. Ed essendo così, dobbiam conchiudere, che quest'altra spezie de' numeri, che si appellano rotti, considerata secondo la nozione sua generale, racchiuda ancora gli stessi numeri interi, che sono i primi a considerarsi in questa scienza.

122. Dalla nozione data del numero rotto egli è facile a dedurne la verità di due teoremi. Il primo si è; che non debba alterarsi il valore di un rotto, con moltiplicare così il numeratore, come il denominatore di esso per un medesimo numero intero. In effetto $\frac{2}{3}$ contiene due delle tre parti, nelle quali s' intende divisa l' unità; onde partendosi ciascuna di quelle in altre due, saranno sei le parti dell' unità, e quattro le parti prese; e perciò $\frac{4}{6}$ non sarà diverso da $\frac{2}{3}$. Similmente $\frac{3}{4}$ contiene tre delle quattro parti, nelle quali si suppone divisa l' unità; onde con partirsi ciascuna di quelle in altre cinque parti eguali, saranno venti le parti dell' unità, e quindici le parti prese; con che $\frac{15}{20}$ non sarà diverso da $\frac{3}{4}$. E della stessa maniera si dimostrerà, che qualunque sia il numero rotto, e qualunque il numero intero, per cui si moltiplica tanto il numeratore, quanto il denominatore, debba sempre rimanere il medesimo numero rotto.

123. L' altro teorema si è, che non debba alterarsi il valore di un rotto, con dividere così il numeratore, come il denominatore di esso per un medesimo numero intero, che sia esatto loro divisore. In effetto $\frac{4}{6}$ contiene quattro delle sei parti, nelle quali s'intende divisa l' unità; onde congiungendole a due a due, cosicchè di due se ne formi una, saranno tre le parti dell' unità, e due le parti pre-

se; e pertanto $\frac{2}{3}$ non sarà diverso da $\frac{4}{6}$. Similmente $\frac{15}{20}$ contiene quindici delle venti parti, nelle quali si suppone divisa l'unità; onde congiungendole a cinque a cinque, cosicchè di cinque se ne formi una, saranno quattro le parti dell'unità, e tre le parti prese; con che $\frac{3}{4}$ non sarà diverso da $\frac{15}{20}$. E della stessa maniera si dimostrerà, che qualunque sia il numero rotto, e qualunque il numero intero, per cui esattamente si divide tanto il numeratore, quanto il denominatore, debba sempre rimanere il medesimo numero rotto.

124. Or siccome per l'Algorismo de' numeri rotti si ha bisogno di alcune riduzioni, così la maniera di eseguirle dipende dalli due riferiti teoremi. Ed in quanto alla prima, che dicesi riduzione d'intero a rotto, ella c'insegna, come un dato numero intero possa ridursi ad un rotto, che abbia un dato denominatore, senza alterare il suo valore. Si fa una tal riduzione con moltiplicare l'intero dato per lo dato denominatore, e con sottoscrivere al prodotto l'istesso denominatore dato. Così volendosi l'intero 3 ridurre a quinti, cioè ad un rotto, che li sia eguale, ed abbia 5 per suo denominatore, si moltiplicherà 3 per 5, ed al prodotto 15 sottoscrivendosi l'istesso 5, sarà $\frac{15}{5}$ il rotto, che si dimanda. E la ragione è chiara, poicchè siccome per l'indole stessa de' numeri interi 3 significa lo stesso, che $\frac{3}{1}$ (121), così per lo primo teorema $\frac{3}{1}$ non è diverso da $\frac{15}{5}$ (122).

125. La seconda riduzione dicesi al contrario riduzione di rotto ad intero; ed apprendiamo propriamente da essa, come da un numero rotto maggiore dell'unità possa ricavarsi il numero intero, che in quello si contiene. Si fa quest' altra riduzione con dividersi il numeratore del rotto dato per lo denominatore del medesimo; poicchè il quoziente di questa divisione sarà l'intero, che si dimanda. Così volendosi ritrovare l'intero, che si

con-

contiene nel rotto $\frac{15}{5}$ maggiore dell'unità, si dividerà il numeratore 15 per lo denominatore 5; e risultando da questa divisione il quoziente 3, sarà 3 l'intero contenuto nel rotto proposto. E la ragione di ciò similmente è chiara; poicchè siccome per lo secondo teorema $\frac{15}{5}$ non è diverso da $\frac{3}{1}$ (123), così per l'indole medesima de' numeri interi $\frac{3}{1}$ è l'istesso, che 3 (121).

126. Tal volta potrebbe avvenire, che nel dividere il numeratore del rotto per lo suo denominatore non possa farsi la divisione esattamente, o senza residuo; onde in questo caso egli è da sapersi, che siccome il quoziente della divisione dee darci l'intero contenuto in quel rotto, così il residuo ci darà le parti dell'unità, che nel medesimo rotto vi sono d'avanzo. Per ragion di esempio, se mai il rotto proposto sia $\frac{17}{5}$, egli è chiaro, che 17 diviso per 5 dà 3 per quoziente, e 2 per residuo; onde nel rotto $\frac{17}{5}$ non solo si conterrà l'intero 3, ma vi saranno di più due quinte parti dell'unità, dimodocchè $\frac{17}{5}$ sarà lo stesso, che 3 e $\frac{2}{5}$. Qual cosa similmente è chiara; poichè siccome il rotto proposto $\frac{17}{5}$ può risolversi in quest' altri due $\frac{15}{5}$, e $\frac{2}{5}$, così riducendosi per la regola data il primo di essi $\frac{15}{5}$ all'intero 3, sarà 3 e $\frac{2}{5}$ il valore di $\frac{17}{5}$.

127. La terza riduzione ci apprende, come a due, o più rotti, che anno denominatori diversi, può darsi un'istesso denominatore, senzacchè si alteri il loro valore; onde si è, che si appella riduzione de' rotti alla stessa dinominazione. Il metodo di farla è questo, si moltiplichi primieramente il numeratore di ciascuno rotto per gli denominatori degli altri, indi si moltiplichino tutti i dinominatori insieme, e siccome i primi prodotti saranno

no i numeratori delli nuovi rotti, che si cercano, così l' altro prodotto sarà il denominatore loro comune. La ragione poi della regola dee dedursi dal primo teorema (122), in quantocchè con quelle tali moltiplicazioni così il numeratore, come il denominatore di ciascuno rotto viene ad essere moltiplicato per un medesimo numero: cioè per lo denominatore dell' altro rotto, se sono due i rotti proposti; e per lo prodotto de' denominatori degli altri, se i rotti proposti sono più di due.

128. Debbansi, per ragion di esempio, ridurre alla stessa denominazione i due rotti $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$. Si moltiplichi primieramente così il numeratore del primo 2 per lo denominatore del secondo 5; come il numeratore di questo 4 per lo denominatore di quello 3, e saranno 10, e 12 i loro rispettivi prodotti; si moltiplichino di poi insieme i due denominatori 3 e 5, ed essendo 15 quest' altro prodotto, saranno $\frac{10}{15}$, e $\frac{12}{15}$ li nuovi rotti, che si dimandano. E così ancora i tre rotti $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ ridotti alla stessa dinominazione diverranno $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, per la ragione, che siccome moltiplicandosi il numeratore di ciascuno di essi per gli denominatori degli altri, si anno i prodotti 40, 45, e 48, così con moltiplicare insieme tutti tre i loro denominatori viene a prodursi 60.

129. Essendo due i rotti, che debbonsi ridurre alla stessa dinominazione, può farsi talvolta la loro riduzione con maggior compendio. Vedasi adunque, se il denominatore maggiore si può dividere esattamente per l' altro minore; e se ciò avviene, con ritrovare il quoziente di tal divisione, e con moltiplicare per quello tanto il denominatore minore, quanto il numeratore, che corrisponde all' istesso denominatore, si farà la riduzione, di cui si tratta. Così, essendo $\frac{2}{3}$, e $\frac{5}{12}$ i due rotti proposti, io ritrovo, che il denominatore maggiore 12 può essere diviso esattamente per l' altro minore

re

re 3; e poichè il quoziente di una tal divisione è 4, io moltiplico per questo 4, così il denominatore, come il numeratore del primo rotto $\frac{2}{3}$; e per lo primo teorema (122) non essendo egli diverso da $\frac{8}{12}$, saranno $\frac{8}{12}$, e $\frac{5}{12}$ i due rotti ridotti alla stessa dinominazione.

130. Per la quarta, ed ultima riduzione, che dicesi riduzione de' rotti a' minimi termini, conviene prima sapere, come di due numeri possa ritrovarsi la massima comune misura. Quindi egli è d'avvertirsi, che misura di un numero dicesi un' altro numero, che può dividerlo esattamente, e senza residuo. Così 3 è misura di 12, per la ragione, che 12 diviso per 3 dà esattamente 4 per quoziente; e così ancora 4 è misura di 20, poicchè il quoziente 5, che risulta dalla divisione di 20 per 4, non va accompagnato con residuo alcuno. Ma siccome secondo questa nozione ogni numero dee avere per sua misura tanto se stesso, quanto l'unità: così se mai un numero non sia capace di altra misura, egli si appella dagli Arimmetici numero primo, siccome sono i numeri 2, 3, 5, 7, 11, ed altri consimili.

131. Si vuol' avvertire ancora, che misura comune di due numeri si chiama un terzo numero, che può dividere così l'uno, come l'altro esattamente, e senza residuo. Così potendo 3 dividere con esattezza tantò 6, quanto 9, si dirà 3 essere misura comune di 6, e 9. Similmente potendosi tanto 15, quanto 20 dividere per 5, si dirà 5 essere misura comune di 15, e 20. E così ancora, perchè ciascuno delli due numeri 20, e 24 può dividersi per 4, si dirà 4 essere misura loro comune. Quindi secondo questa nozione chiara cosa si è, che l'unità debba essere misura comune di tutti i numeri; ma se mai due numeri, oltre all' unità, non abbiano altra misura comune, essi sogliono chiamarsi dagli Arimmetici numeri primi tra loro: qual cosa potrebbe avvenire, ancorchè nessuno delli due numeri fosse primo di sua natura.

132. Fi-

132. Finalmente egli è d'avvertirsi, che siccome due numeri possono avere talvolta molte misure comuni, così la maggiore di tutte si appella massima loro comune misura. Per ragion di esempio i due numeri 18, e 30, oltre all'unità, anno per misura loro comune tre altri numeri, cioè 2, 3, e 6; onde il numero 6, che è maggiore di tutti, si dice essere la massima comune misura delli due numeri 18, e 30. E poichè ogni numero è misura di se medesimo, chiara cosa si è, che se vi sono due numeri, ed il minore di essi sia misura dell'altro maggiore, quello stesso minore debba aversi come massima misura comune di amendue. Così 6 è misura di 12, onde l'istesso 6 sarà massima comune misura di 6, e 12. Similmente, essendo 18 misura di 54, sarà l'istesso 18 massima misura comune di 18, e 54.

133. Or siccome di questa massima comune misura si ha bisogno per la riduzione de'rotti a'minimi termini, così ella si ritrova con dividere primieramente il maggiore de' due numeri dati per l'altro minore, indi il minore per lo residuo di quella divisione, di poi quel residuo per lo residuo della seconda divisione, in appresso quest' altro residuo per lo residuo della terza, e così consecutivamente persino a che si venga ad una divisione, che non lasci verun residuo; poichè l'ultimo residuo sarà la massima comune misura de' due numeri dati: tantocchè se quell' ultimo residuo sia l'unità, saranno i due numeri primi tra loro, ed oltre all'unità non avranno altra misura comune. Ma se mai la stessa prima divisione possa farsi esattemente, e senza residuo; in tal caso il minore delli due numeri sarà la massima loro comune misura.

134. Siano a cagion di esempio 100, e 15 i due numeri dati. Dividasi primieramente 100 per 15, e si avrà 10 per residuo; dividasi poscia 15 per 10, ed il secondo residuo sarà 5; dividasi in appresso 10 per 5, e la divisione si farà esattamente, e senz'altro residuo; onde il secondo residuo

5 sa-

5 farà la massima comune misura di 100, e 15. Siano ancora 31, e 7 i due numeri proposti: Con dividere 31 per 7 rimane 3, con dividere 7 per 3 rimane 1, e con dividere 3 per 1, non si ha altro residuo; quindi farà 1 la massima comune misura di 31, e 7; e pertanto questi due numeri saranno primi tra loro. Siano finalmente 18, e 6 i due numeri dati. E poichè con dividere 18 per 6, non si ha residuo alcuno, farà l'istesso 6 la massima comune misura di 18, e 6.

135. Per quanto alla ragione della riferita operazione, dipende ella da due principj. Il primo si è, che se un numero, come 5, sia misura di un' altro numero, come di 10; debba egli essere misura altresì di ogn' altro numero, che sia misurato da 10, come di 20, 30, 40, 50, &c. L'altro si è, che se un numero, come 5, sia misura di due altri numeri, come di 30, e 20; debba egli essere misura parimente tanto della loro somma 50, quanto della loro differenza 10. Imperocchè, siccome con questi principj vedesi chiaramente, che con fare quelle consecutive divisioni, debba l'ultimo residuo essere misura comune non meno de' residui precedenti, che delli due numeri dati; così per mezzo de' medesimi facilmente si pruoverà, che ogn' altra misura comune degli stessi due dati numeri debba misurare altresì l'ultimo residuo, ed in conseguenza essere o eguale a quello, o pure minore.

136. Dimostrato adunque, come possa ritrovarsi la massima comune misura di due numeri dati, facilmente ora potrà eseguirsi la riduzione de' rotti a' minimi termini, la quale consiste propriamente in ritrovare la più semplice espressione di un rotto dato. Si ritrovi perciò la massima comune misura di que' due numeri, che sono denominatore, e numeratore del rotto proposto; e con dividere ciascuno di essi per quella massima loro misura comune, si avrà la più semplice espressione del medesimo rotto. Così posto, che il rotto sia $\frac{15}{100}$, farà 5 la massima comune misura di 100, e 15;

e 15; onde perchè 100 diviso per 5 dà 20, e 15 diviso per 5 dà 3, sarà $\frac{3}{20}$ la minima espressione di $\frac{15}{100}$. E similmente, essendo $\frac{6}{18}$ il rotto proposto, sarà 6 la massima misura comune di 18, e 6; onde perchè 18 diviso per 6 dà 3, e 6 diviso per 6 dà 1, sarà $\frac{1}{3}$ la più semplice espressione di $\frac{6}{18}$.

137. Ed in vero, siccome per lo secondo teorema (123) non dee alterarsi il valore di un rotto, qualora tanto il suo numeratore, quanto il suo denominatore si divide per un' istesso numero, che sia misura loro comune; così egli è chiaro, non esservi altro mezzo per esprimere più semplicemente un rotto, che servirsi di una tal divisione; onde quantevolte la comune misura, che s' impiega in quella divisione, è la massima, per necessità il rotto dovrà ridursi alla minima sua espressione. Ma conforme, qualora il numeratore, ed il denominatore di un rotto si ritrovano essere numeri primi tra loro, egli è impossibile di rinvenire altra espressione più semplice di quel rotto; così chiara cosa ancòra si è, che con ridurre un rotto a' minimi termini, il suo numeratore, ed il suo denominatore vengono a farsi numeri primi tra loro.

## §. II.

### *Dell' Addizione, e Sottrazione de' rotti.*

138. Premessa la nozione de' rotti, e spiegate altresì le varie riduzioni, delle quali si ha bisogno, passeremo ora al loro Algorismo. E per incominciare dall' operazioni più semplici, cioè dall' addizione, e sottrazione, noteremo primieramente, che le nozioni di esse, date di sopra per gli numeri interi, non solo non ricevono cambiamento alcuno per rapporto a' rotti, ma sono affatto le medesime; poicchè ancora coll' addizione si fa di due, o più rotti una som-

somma sola, ed eziandio colla sottrazione si ritrova la differenza tra un rotto maggiore, ed un' altro minore; onde si è, che similmente a riguardo de' rotti l' addizione contribuisce al loro aumento, e la sottrazione per contrario alla loro diminuzione. Ed è necessario, che ciò si avverta; poicchè per quanto tocca alla moltiplicazione, e divisione, le loro nozioni ne' rotti, secondo vedremo in appresso, ricevono talvolta qualche cambiamento; nè sempre i rotti si aumentano colla moltiplicazione, e colla divisione si diminuiscono.

139. Adunque per quanto all' addizione de' rotti, debbonsi per essa distinguere due casi. Il primo si è, quando i rotti da sommarsi insieme anno un' istesso denominatore; ed in questo caso, essendo omogenee le loro parti, si farà l' addizione di essi, con aggiungere insieme i loro numeratori, che disegnano la moltitudine di dette parti, e con dare alla somma il medesimo denominatore. Così dovendosi sommare $\frac{3}{7}$ con $\frac{2}{7}$, sarà $\frac{5}{7}$ la loro somma; e similmente dovendosi unire $\frac{4}{11}$ con $\frac{5}{11}$, sarà $\frac{9}{11}$ la somma, che si dimanda. L' altro si è, quando i rotti, che si debbono unire insieme, anno denominatori diversi, ed in conseguenza parti dissimili; e qualora ciò avviene, si farà la loro addizione con ridurli alla stessa dinominazione, secondo la regola data di sopra (127). Così, se i rotti da sommarsi insieme siano $\frac{1}{5}$, e $\frac{2}{3}$, questi ridotti alla stessa dinominazione diverranno $\frac{3}{15}$, e $\frac{10}{15}$; onde la loro somma sarà $\frac{13}{15}$.

140. Or siccome i rotti, che si debbono sommare insieme, per lo più sogliono proporsi colle loro più semplici espressioni; così la somma, che da essi si ricava, si dovrà altresì ridurre a' minimi termini, qualora l' indole sua lo permette (136). Anzi se mai tal somma fosse un rotto, o eguale all' unità, o pure maggiore dell' unità, non sarebbe mal fatto, colla riduzione de' rotti ad interi (125),

di

di investigare l'intero, che in quella stessa somma si contiene, e notare separatamente le parti dell' unità, che vi saranno forse d'avanzo. Così, dovendosi unire insieme i due rotti $\frac{5}{8}$, ed $\frac{1}{8}$, la loro somma sarà $\frac{6}{8}$, che riducesi a $\frac{3}{4}$. E similmente, dovendosi sommare i due rotti $\frac{3}{4}$, e $\frac{5}{6}$, che con ridurli alla stessa denominazione diventano $\frac{18}{24}$, e $\frac{20}{24}$, sarà la somma di essi $\frac{38}{24}$, che si riduce ad 1 e $\frac{14}{24}$, o pure ad 1 e $\frac{7}{12}$.

141. Avviene talvolta, che i rotti siano uniti con interi, e che debbansi sommare insieme così gli uni, come gli altri. In questo caso prima si sommeranno i rotti, ed indi gli interi; ma per non esprimere in una maniera impropria la somma totale, per necessità bisogna vedere, se nella somma de' rotti vi sia contenuto qualche intero, affinchè si possa egli accoppiare colla somma degli altri interi, e far rimanere nel luogo de' rotti le sole parti dell' unità, che forse vi sopravanzano. Così, dovendosi sommare insieme i due numeri $57349\frac{5}{6}$, e $95785\frac{7}{8}$, de' quali ciascuno si compone d'intero, e rotto, si scriverà l'intero sotto l'intero, ed il rotto sotto il rotto; ma tirata più sotto la linea, si sommeranno prima i due rotti $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, con ridurli alla stessa denominazione. E

$$\begin{array}{r} 57349\frac{5}{6} \\ 95785\frac{7}{8} \\ \hline 153135\frac{17}{24} \end{array}$$

poicchè la loro somma si ritrova essere $\frac{82}{48}$; che riducesi ad 1, e $\frac{34}{48}$, o pure ad 1, e $\frac{17}{24}$; si scriverà $\frac{17}{24}$ nel luogo de' rotti, e l'1 si accoppierà colla

som-

ſomma degli interi. Onde la ſomma totale, che ſi dimanda, ſarà $153135\frac{17}{24}$.

142. Per quanto poi alla ſottrazione de' rotti, ancora per eſſa debbonſi diſtinguere due caſi. Il primo ſi è, quando i due rotti ànno un'iſteſſo denominatore; ed in queſto caſo eſſendo omogenee le loro parti, ſi farà la ſottrazione con togliere il numeratore minore dal numeratore maggiore, e con dare al reſiduo il medeſimo denominatore. Così, dovendoſi ſottrarre $\frac{3}{7}$ da $\frac{5}{7}$; ſarà $\frac{2}{7}$ il reſiduo, che ſi cerca; e ſimilmente dovendoſi ſottrarre $\frac{5}{11}$ da $\frac{9}{11}$, ſarà $\frac{4}{11}$ il reſiduo, che ſi dimanda. L'altro ſi è, quando i due rotti ſi ritrovano avere denominatori diverſi, ed in conſeguenza parti diſſimil; e qualora ciò avviene, ſi farà la ſottrazione, con ridurre quei rotti alla ſteſſa dinominazione, ſecondo la regola data di ſopra (127). Così, ſe ſi voglia ſottrarre $\frac{2}{3}$ da $\frac{4}{5}$, ſi ridurranno prima queſti rotti alla ſteſſa dinominazione; e poichè con una tal riduzione $\frac{2}{3}$ diviene $\frac{10}{15}$, e $\frac{4}{5}$ ſi cambia in $\frac{12}{15}$, dovrà toglierſi $\frac{10}{15}$ da $\frac{12}{15}$; onde ſarà $\frac{2}{15}$ il reſiduo della ſottrazione propoſta.

143. Ma eziandio nella ſottrazione biſogna avvertire, che ſiccome i rotti per eſſa propoſti ſogliono il più delle volte avere le più ſemplici eſpreſſioni; così il reſiduo, che dalla medeſime ſi ricava, ſimilmente dee eſſere ridotto a' minimi termini, qualora l'indole ſua lo permette (139). Così, dovendoſi ſottrarre $\frac{3}{8}$ da $\frac{7}{8}$, il ſeſiduo ſarà $\frac{4}{8}$, che riduceſi ad $\frac{1}{2}$; ed ancora, ſe ſi voglia da $\frac{5}{6}$ togliere $\frac{7}{10}$, il reſiduo ſarà $\frac{8}{60}$, che ſi riduce a $\frac{2}{13}$. Il caſo poi di doverſi far uſo della riduzione d'intero a rotto, qui affatto non può aver luogo; poichè conforme i rotti dati per la ſottrazione ſi ſuppongono eſſere minori dell'unità, così tanto maggiormente il reſiduo, che dalla ſottrazione ſi rica-

 va,

va, dovrà essere un rotto della medesima spezie.

144. Più tosto è necessario quì talvolta impiegare la riduzione contraria, cioè d'intero a rotto (124); e si ha di essa bisogno, qualora da un numero intero deesi sottrarre un numero rotto. Intanto per questo caso non occorre ridurre a rotto tutto il numero intero dato, ma basterà, che vi si riduca una delle sue unità, a cui dovrà darsi l'istesso denominatore del rotto proposto. Così, bisognando da 4 sottrarre $\frac{2}{5}$, si prenderà una unità da 4, e si ridurrà a $\frac{5}{5}$; onde dovendosi poscia da 3, e $\frac{5}{5}$ sottrarre $\frac{2}{5}$, la sottrazione potrà farsi facilmente, e sarà 3, e $\frac{3}{5}$ il suo residuo. È così parimente, se mai si voglia da 6 sottrarre $\frac{4}{7}$, con prendere una unità da 6, e con ridurla a $\frac{7}{7}$, si ritroverà, che il residuo sia 5, e $\frac{3}{7}$.

145. L'istessa cosa può avvenire altresì nella sottrazione stessa de' rotti, ma nel caso, che questi siano uniti ad altri numeri interi, ed il rotto sottraendo sia maggiore dell'altro, da cui egli dee sottrarsi. Così, bisognando da $75683\frac{2}{3}$ sottrarre $39859\frac{3}{4}$, si scriveranno questi due numeri l'uno sotto l'altro, e tirata più sotto la linea, si

$$\begin{array}{r} 75683\frac{2}{3} \\ 39859\frac{3}{4} \\ \hline 35823\frac{11}{12} \end{array}$$

farà primieramente la sottrazione de' rotti. E poichè non può sottrarsi $\frac{3}{4}$ da $\frac{2}{3}$, ò pure $\frac{9}{12}$ da $\frac{8}{12}$, si prenderà una unità dall'intero superiore, la quale, dopo essersi ridotta a $\frac{12}{12}$, si unirà con $\frac{8}{12}$; e si toglierà $\frac{9}{12}$ da $\frac{20}{12}$; con che il residuo sarà $\frac{11}{12}$, il qua-

il quale si scriverà sotto la linea nel luogo de' rotti. Onde, facendo poscia la sottrazione degli interi, con rammentarci di essersi presa una unità dall' intero superiore; ritroveremo essere $35823 \frac{11}{12}$ il residuo totale della sottrazione proposta.

146. Egli è intanto quì da notarsi, che l' artificio, il quale pratticasi in questo caso, è totalmente simile a quello, che s' impiega nella sottrazione degli interi, qualora da un carattere minore del numero superiore dee togliersi un carattere maggiore dell' altro inferiore; poicchè così nell' uno, come nell' altro caso dee prendersi una unità dal carattere, che segue, e risolversi in tante parti, quante ne richiede l' indole del luogo, ove ella si trasporta. Quindi nella sottrazione degli interi, secondo si è veduto di sopra, quella tal' unità si dee sempre risolvere in dieci parti, per la ragione, che il valore locale de' caratteri si aumenta sempre nel decuplo (34); ma nella sottrazione de' rotti, secondo la regola data, bisogna che si risolva in tante parti, quante ne disegna il denominatore del rotto, da cui l' altro dee sottrarsi.

147. Con questa occasione egli è ancora quì da notarsi, che ne' numeri interi espressi con molti caratteri implicitamente sta racchiusa la considerazione de' rotti, per la ragione, che se si voglia attentamente riflettere, il valore di ciascuno de' loro caratteri può aversi come un rotto per rapporto al valore dell' altro carattere, a cui egli precede. Così nell' intero 35 il carattere 5 posto nel primo luogo significa cinque unità, ed il carattere 3 posto nel secondo luogo significa tre diecine; ma essendo cinque unità cinque decime parti di una diecina, potrà riguardarsi il valore del carattere 5 come un rotto per rapporto al valore del carattere 3. E così ancora nell' intero 476 il carattere 7 posto nel secondo luogo significa sette diecine, ed il carattere 4 situato nel terzo significa quattro centinaja; ma essendo sette diecine sette decime parti di un centinajo, potrà aversi il valore del carattere

re 7 come un rotto a riguardo del valore del carattere 4.

148. Or ficcome una tal confiderazione deriva dallo ftabilimento fatto dagli Arimmetici di doverfi aumentare il valore di ogni carattere a mifura del luogo, che egli occupa; così facendofi il fuo aumento fempre nel decuplo, chiara cofa fi è, che le parti del rotto, a cui il valore di un carattere può ridurfi per rapporto al valore dell' altro, a cui egli precede, fiano fempre decime. Ma fe il valore di un carattere può averfi come rotto a riguardo del valore dell' altro carattere, che immediatamente lo fegue, tanto più potrà confiderarfi come tale a riguardo de' valori degli altri caratteri più diftanti: nel quale cafo però le parti di effo rotto non faranno decime, ma bensì centefime, fe la diftanza fia di due luoghi, millefime, fe di tre, e così all' infinito.

149. Per ragion di efempio nell' intero 9568 le otto unità difegnate dal primo carattere 8 fono otto decime parti di ciafcuna delle fei diecine difegnate dal fecondo carattere 6; ma quelle fteffe otto unità faranno otto centefime parti di ciafcuno delle cinque centinaja difegnate dal terzo carattere 5, ed otto millefime parti di ciafcuno delle nove migliaja difegnate dall' ultimo carattere 9. E così parimente in queft' altro intero 85764, ficcome le fei diecine difegnate dal fecondo carattere 6 fono fei decime parti di ciafcuno delle fette centinaja difegnate dal terzo carattere 7, così le medefime faranno fei centefime parti di ciafcuno delle cinque migliaja difegnate dal quarto carattere 6, e fei millefime parti di ciafcuna delle otto diecine di migliaja difegnate dall' ultimo carattere 8.

150. Nè debbono ftimarfi di sì poco momento le rifleffioni quì fatte di paffaggio, poichè appunto quefte tali rifleffioni anno dato motivo agli Arimmetici di confiderare più dappreffo i veri rotti decimali, per mezzo de' quali fi appongono altri luoghi avanti a quello delle unità, in cui poi

i va-

i valori de' caratteri si diminuiscono sempre nel decuplo. Non essendosi intanto dato termine all' Algorismo de' rotti in generale, non possiamo per ora entrare nella considerazione de' menzionati rotti decimali; ma contenti di averne additata in questo luogo la vera origine, ci riserberemo a trattare spezialmente di essi nella fine di questo capitolo: maggiormente, che la loro teoria non solo dipende da quella de' rotti in generale, la quale perciò dee condursi a fine, ma eziandio da un' altra de' rotti de' rotti, di cui in conseguenza è necessario, che prima si raggioni.

151. Per ritornare adunque all' addizione, e sottrazione de' rotti, egli è inutile di rendere ragione dell' artificio, che si è tenuto per esse. Poichè siccome vedesi chiaramente, che debbonsi quelle regolare colli soli numeratori, quando le parti sono simili; così per renderle tali, essendo dissimili, chiara cosa si è, che si debbano ridurre i rotti alla stessa denominazione. Per quanto poi all' esame di queste due operazioni fatte con rotti, si potrà l' una esaminare per mezzo dell' altra in virtù di quelle medesime ragioni, che furono date di sopra, trattandosi dell' addizione, e sottrazione degli interi. Così, per vedere, se sottraendosi $\frac{2}{3}$ da $\frac{4}{5}$, il residuo sia $\frac{2}{15}$, basterà, che questo residuo si aggiunga a $\frac{2}{3}$, che è il rotto minore, ed indi che si osservi, se la somma, che ne risulta, sia eguale all' altro rotto maggiore $\frac{4}{5}$. E così ancora per vedere, se la somma de' due rotti $\frac{2}{5}$, e $\frac{3}{7}$ sia $\frac{29}{35}$, basterà, che da questa somma si tolga uno delli due rotti sommati come $\frac{2}{5}$, ed indi che si osservi, se il residuo, che ne deriva, sia eguale all' altro rotto $\frac{3}{7}$.

## §. III.

### *Della Moltiplicazione, e Divisione de' rotti.*

152. TRattandosi de' rotti, il primo caso, che bisogna distinguere così nella moltiplicazione, come nella divisione, si è, quando un rotto si dee moltiplicare, o dividere per un' intero. In questo caso le nozioni date di sopra per la moltiplicazione, e divisione degli interi, sossistono le medesime; poichè per la moltiplicazione dovrà prendersi il rotto moltiplicando tante volte, quante sono unità nell' intero moltiplicatore, e per la divisione dovrà prendersi del rotto dividendo una parte tale, che sia dinominata dall' intero divisore. Onde, siccome ancora quì la moltiplicazione dee riguardarsi come un' addizione reiterata, e la divisione come una reiterata sottrazione; così si faranno amendue con moltiplicare, o dividere il numeratore del dato rotto per l' intero proposto. Il prodotto adunque di $\frac{2}{7}$ moltiplicato per 3 sarà $\frac{6}{7}$, e quello di $\frac{2}{9}$ moltiplicato per 4 sarà $\frac{8}{9}$. Per lo contrario poi il quoziente di $\frac{6}{7}$ diviso per 3 sarà $\frac{2}{7}$, ed il quoziente di $\frac{8}{9}$ diviso per 4 sarà $\frac{2}{9}$.

153. Per la moltiplicazione intanto bisogna avvertire, che moltiplicandosi un rotto per un' intero si può produrre talvolta un rotto, che contenga qualche intero; onde quando ciò avviene, potrà farsi uso della riduzione de' rotti ad interi (125). Così, moltiplicandosi $\frac{3}{4}$ per 5, si produce $\frac{15}{4}$, che riducesi a 3, e $\frac{3}{4}$; e similmente moltiplicandosi $\frac{3}{4}$ per 10, si produce $\frac{20}{3}$, che si riduce a 6, e $\frac{2}{3}$. Questo stesso nella divisione non può aver luogo, ma in essa il più delle volte si suole incontrare una difficoltà di non poco momento, e si è, che il

il numeratore del rotto non si possa dividere esattamente, e senza residuo per l'intero, che fa le veci del divisore. Da ciò derivano i rotti de' rotti, de' quali raggioneremo in appresso; intanto potrà farsi la divisione, di cui si tratta, con moltiplicare il denominatore del dato rotto per l'intero proposto. Così il quoziente di $\frac{1}{7}$ diviso per 4 sarà $\frac{1}{28}$; ed ancora il quoziente di $\frac{2}{3}$ diviso per 6 sarà $\frac{2}{18}$, o pure $\frac{1}{9}$.

154. Ed in vero non potendosi il numeratore del dato rotto dividere per l'intero proposto, si dovrà fare in modo, che il rotto abbia espressione tale, per cui si renda possibile quella tal divisione; ma siccome riceve egli sempre sì fatta espressione, quante volte per lo medesimo intero dato si moltiplica tanto il suo numeratore, quanto il suo denominatore, così da questo stesso dipende la ragione della regola data. In effetto dovendosi dividere $\frac{5}{7}$ per 4, egli è impossibile di avere un quoziente esatto di 5 diviso per 4; ma con moltiplicare per 4 non meno il numeratore, che il denominatore di $\frac{5}{7}$, riducesi questo rotto a $\frac{20}{28}$, il di cui numeratore può dividersi per 4; onde dovendo essere $\frac{5}{28}$ il quoziente di $\frac{5}{7}$ diviso per 4, potrà aversi a dirittura questo tale quoziente con moltiplicare per 4 il denominatore di $\frac{5}{7}$.

155. Se il rotto sia unito a qualche intero, ed il numero composto da amendue si debba moltiplicare, o dividere per un'altro intero; si potranno fare due operazioni separate, ed indi unire insieme i prodotti, o quozienti parziali, che da quelle si ricavano. Così, dovendosi moltiplicare il numero $3564\frac{4}{5}$ per 3, sarà 10692 il prodotto di 3564 moltiplicato per 3, e $\frac{12}{5}$, o pure $2.\frac{2}{5}$ il prodotto di $\frac{4}{5}$ moltiplicato ancora per 3; onde con unire insieme questi due prodotti parziali, sarà la somma

 ma

ma di essi 10694 $\frac{2}{5}$ il prodotto totale della moltiplicazione proposta. E così ancora dovendosi dividere il numero 7898 $\frac{4}{7}$ per 5, sarà 1579 $\frac{3}{5}$ il quoziente di 7898 diviso per 5, e $\frac{4}{35}$ il quoziente di $\frac{4}{7}$ diviso ancora per 5; onde con unire insieme questi due quozienti parziali, sarà la somma di essi 1579 $\frac{25}{35}$, o pure 1579 $\frac{5}{7}$ il quoziente totale della divisione proposta.

156. Il secondo caso si è, quando un numero qualsivoglia si dee moltiplicare, o dividere per un rotto; e per questo caso bisogna dare altro aspetto alle nozioni della moltiplicazione, e divisione stabilite di sopra per gli interi, non potendo quelle aver luogo, quando il moltiplicatore, ed il divisore sono numeri rotti. Or quantunque ciò sia facile a farsi a riguardo della moltiplicazione, potendosi dire, che siccome, a cagion di esempio, moltiplicare 12 per 3 è l'istesso, che prendere il triplo di 12, così moltiplicare 12 per $\frac{3}{4}$ sia lo medesimo, che prendere i tre quarti di 12; tuttavolta per rapporto alla divisione non si scorge così facilmente, come ella debba concepirsi. Perciò potendosi ogni intero esprimere a guisa di rotto in infinite maniere (124); vediamo più tosto a che riduconsi negli stessi interi queste due operazioni, quando al moltiplicatore, ed al divisore si dà forma di rotto.

157. E per farne la ricerca primieramente a riguardo della moltiplicazione, debbasi a cagion di esempio moltiplicare 8 per 3. Potendosi adunque questo 3 esprimere per $\frac{6}{2}$, l'istesso sarà moltiplicare 8 per 3, che moltiplicare 8 per $\frac{6}{2}$. Or dovendo il prodotto della moltiplicazione essere 24, egli è chiaro, che si avrà questo prodotto con prendere il sestuplo non già di 8, ma della sua metà, che è 4. Quindi la moltiplicazione di un numero qualsivoglia per un rotto riducesi a prendere, non già tut-

to il numero, ma quella ſua parte, che viene diſegnata dal denominatore del rotto, tantevolte, quante ſono unità nel numeratore dell'iſteſſo rotto. Ed eſſendo così, ſi farà la ſuddetta moltiplicazione, prima con dividere il numero propoſto per lo denominatore del rotto, ed indi con moltiplicare il quoziente di queſta diviſione per lo numeratore del medeſimo rotto.

158. Così, dovendoſi moltiplicare l'intero 773957 per lo rotto $\frac{2}{3}$, io divido primieramente quell'intero per 3, che è il denominatore del rotto, e farà $257985\frac{2}{3}$ il quoziente di una tal diviſione; moltiplico di poi queſto quoziente per 2, che è il numeratore del medeſimo rotto, e riſultando da queſta moltiplicazione il prodotto $515971\frac{1}{3}$, farà queſto ſteſſo numero il prodotto della moltiplicazione propoſta. E quantunque riguardando il rotto $\frac{2}{3}$ come moltiplicando, e l'intero 773957 come moltiplicatore, ſi dovrebbe per la regola data nel primo caſo primieramente moltiplicare 2 per 773957, ed indi dividere il prodotto per 3; pure però ſi verrebbe ad avere il medeſimo numero $515971\frac{1}{3}$ per prodotto della moltiplicazione, di cui ſi tratta, per la ragione, che l'iſteſſo è dividere un numero per un'altro, ed indi moltiplicare il quoziente per un terzo che prima moltiplicare quel numero per queſto terzo, e di poi dividere il prodotto per lo ſecondo.

159. Similmente dovendoſi moltiplicare il rotto $\frac{6}{11}$ per l'altro rotto $\frac{2}{3}$, io divido primieramente il rotto moltiplicando $\frac{6}{11}$ per 3, che è il denominatore del rotto moltiplicatore, e farà $\frac{2}{11}$ il quoziente di una tal diviſione; moltiplico in appreſſo queſto quoziente per 2, che è il numeratore del medeſimo rotto moltiplicatore, ed avendoſi con queſta moltiplicazione il prodotto $\frac{4}{11}$, farà queſto ſteſſo rotto il prodotto della moltiplicazione propoſta.

Ma

Ma se mai si dovesse moltiplicare $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{7}$, il prodotto sarebbe $\frac{12}{35}$, per la ragione, che siccome il quoziente di $\frac{3}{5}$ diviso per 7 non può essere altro, che $\frac{3}{35}$ così il prodotto di $\frac{3}{35}$ moltiplicato per 4 è $\frac{12}{35}$. È quindi si è, che per la moltiplicazione di un rotto per un rotto ordinariamente suol darsi questa regola, cioè che debba moltiplicarsi numeratore per numeratore, e denominatore per denominatore.

160. Finalmente dovendosi moltiplicare il numero $35645\frac{2}{3}$, che si compone d'intero, e rotto, per lo rotto semplice $\frac{4}{7}$, si potranno fare due moltiplicazioni separate, con moltiplicare prima l'intero 35645 per $\frac{4}{7}$, ed indi il rotto $\frac{2}{3}$ ancora per $\frac{4}{7}$: poichè siccome in questa maniera si avranno i due prodotti parziali $20368\frac{4}{7}$, e $\frac{8}{21}$, così la somma di essi $20368\frac{20}{21}$ sarà il prodotto totale della moltiplicazione proposta. Ed in un modo consimile dovendosi moltiplicare per $\frac{2}{3}$ quest'altro numero $37568\frac{4}{5}$, che eziandio si compone d'intero, e rotto; lo primieramente moltiplico l'intero 37568 per $\frac{2}{3}$, che darà per prodotto $25045\frac{1}{3}$, e di poi il rotto $\frac{4}{5}$ ancora per $\frac{2}{3}$, da cui si produrrà $\frac{8}{15}$; congiungendo poscia insieme questi due prodotti parziali, avrò colla somma di essi $25045\frac{13}{15}$ il prodotto totale della proposta moltiplicazione.

161. Vediamo ora a che riducesi la divisione negli stessi interi, quante volte a quello, che fa le veci di divisore, si dà forma di rotto. Debbasi perciò a cagion di esempio dividere 24 per 3; e potendosi questo 3 esprimere per $\frac{6}{2}$, l'istesso sarà dividere 24 per 3, che dividere 24 per $\frac{6}{2}$. Or dovendo il quoziente della divisione essere 8, egli è chia-

è chiaro, che si avrà questo quoziente con prendere la sesta parte non già di 24, ma del suo doppio, che è 48. Quindi la divisione di un numero qualsivoglia per un rotto riducesi a prendere, non già del numero proposto, ma di quel suo moltiplice, che viene disegnato dal denominatore del rotto, una parte tale, che possa essere dinominata dal numeratore dell' istesso rotto. Ed essendo così, si farà la sudetta divisione, prima con moltiplicare il numero proposto per lo denominatore del rotto, ed indi con dividere il prodotto di questa moltiplicazione per lo numeratore del medesimo rotto.

162. Così, dovendosi dividere l' intero 534769 per lo rotto $\frac{2}{3}$, io moltiplico primieramente quell' intero per 3, che è il denominatore del rotto, e farà 1604307 il prodotto di una tal moltiplicazione; divido di poi questo prodotto per 2, che è il numeratore del medesimo rotto, e risultando da questa divisione il quoziente 802153 $\frac{1}{2}$, farà questo stesso numero il quoziente della divisione proposta. Ma il medesimo quoziente potrebbe aversi ancora, prima con dividere il numero proposto 534769 per lo numeratore 2, ed indi con moltiplicare il quoziente, che ne deriva 267384 $\frac{1}{2}$ per lo denominatore 3; essendo chiaro, che il prodotto di questa moltiplicazione sia il medesimo numero 802153 $\frac{1}{2}$. Come in effetto l' istesso è moltiplicare un numero per un' altro, ed indi dividere il prodotto per un terzo, che prima dividere quel numero per questo terzo, e di poi moltiplicare il quoziente per lo secondo.

163. Similmente dovendosi dividere il rotto $\frac{4}{11}$ per $\frac{2}{5}$, io moltiplico primieramente il rotto dividendo $\frac{4}{11}$ per 5, che è il dinominatore del rotto divisore, e farà $\frac{20}{11}$ il prodotto di una tal moltiplicazione; divido in appresso questo prodotto per

per 2, che è il numeratore del medesimo rotto divisore; ed avendosi con questa divisione il quoziente $\frac{10}{11}$, sarà questo rotto il quoziente della divisione proposta. Ma se mai si dovesse dividere $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{4}$, il quoziente sarebbe $\frac{8}{15}$, per la ragione, che siccome il prodotto di $\frac{2}{5}$ moltiplicato per 4 è $\frac{8}{5}$, così il quoziente di $\frac{8}{5}$ diviso per 3 non può essere altro, che $\frac{8}{15}$. E quindi si è, che per la divisione di un rotto per un rotto ordinariamente suol darsi questa regola, cioè che debba moltiplicarsi il numeratore del dividendo per lo denominatore del divisore, ed al contrario il denominatore del dividendo per lo numeratore del divisore.

164. Finalmente, dovendosi dividere il numero $75635\frac{2}{5}$, che si compone d'intero, e rotto, per lo rotto semplice $\frac{3}{4}$, si potranno fare due divisioni separate, con dividere prima l'intero 75635 per $\frac{3}{4}$, ed indi il rotto $\frac{2}{5}$ ancora per $\frac{3}{4}$; poichè siccome in questa maniera si avranno i due quozienti parziali $100846\frac{2}{3}$, ed $\frac{8}{15}$, così la somma di essi $100847\frac{1}{5}$ sarà il quoziente totale della divisione proposta. Ed in un modo consimile dovendosi dividere per $\frac{2}{3}$ quest'altro numero $65345\frac{3}{5}$, che similmente si compone d'intero, e rotto; io primieramente divido l'intero 65345 per $\frac{2}{3}$ che darà per quoziente $98017\frac{1}{2}$, e di poi il rotto $\frac{3}{5}$ ancora per $\frac{2}{3}$, da cui nascerà il quoziente $\frac{9}{10}$, congiungendo poscia insieme questi due quozienti parziali, avrò colla somma di essi $98018\frac{2}{5}$ il quoziente totale della proposta divisione.

165. Dalle cose dette sin'ora, egli è facile il dedurne, che dovendosi un numero qualsivoglia moltiplicare, o dividere per un rotto, sia così notabile il cambiamento, che ricevono le nozio-

ni

ni della moltiplicazione, e divisione date per gli interi, che laddove in quelli la moltiplicazione contribuisce all' aumento del moltiplicando, e la divisione alla diminuzione del dividendo, quì per lo contrario colla moltiplicazione si diminuisce il moltiplicando, e colla divisione si aumenta il dividendo. Intanto, se vogliamo rammentarci di questanto fu avvertito di sopra (121), cioè che ogni intero per propria indole ha l' unità medesima per suo denominatore, si comprenderà facilmente, che ancora alla moltiplicazione, e divisione degli interi possono applicarsi quelle stesse nozioni, che debbono aver luogo, quando il moltiplicatore, ed il divisore sono numeri rotti; e che il divario intorno all' aumento, e diminuzione del moltiplicando, e dividendo deriva appunto dall' essere l' unità il denominatore proprio di ogni intero.

166. Il terzo, ed ultimo caso si è, quando un numero qualsivoglia si dee moltiplicare, o dividere per un' altro numero, che sia composto d' intero, e rotto. E per quanto alla moltiplicazione, si potranno per essa fare due operazioni separate, con moltiplicare il numero proposto prima per l' intero, ed indi per lo rotto; poichè la somma di questi prodotti parziali sarà il prodotto totale, che si dimanda. Così, dovendosi moltiplicare $357 \frac{2}{3}$ per $25 \frac{3}{4}$, io moltiplico primieramente $357 \frac{2}{3}$ per 25, e sarà $8941 \frac{2}{3}$ il prodotto di questa prima moltiplicazione; moltiplico di poi l' istesso $357 \frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$, e sarà $268 \frac{1}{4}$ il prodotto di quest' altra moltiplicazione; congiungo finalmente insieme i due prodotti parziali ritrovati, e sarà la loro somma $9209 \frac{11}{12}$ il prodotto totale della moltiplicazione proposta.

167. Per quanto poi alla divisione, non permette la sua natura, che per essa si possano fare due operazioni separate, come si è fatto nella moltiplicazione, per non essere la stessa cosa dividere un numero per un' altro numero, che dividerlo

ora

ora per una parte di quello, ed ora per un' altra parte. Si farà adunque la divisione con dare forma di rotto a tutto il divisore; e perciò l'intero contenuto nel divisore dovrà ridursi a rotto tale, che abbia l'istesso denominatore col rotto, che li sta unito (124). Così, dovendosi dividere $756\frac{3}{4}$ per $8\frac{2}{3}$, io riduco l'intero 8 ad un rotto, che abbia ancora 3 per suo denominatore; e siccome egli diverrà $\frac{24}{3}$, così $8\frac{2}{3}$ sarà l'istesso, che $\frac{26}{3}$. Quindi in vece di dividere $756\frac{3}{4}$ per $8\frac{2}{3}$, io divido $756\frac{3}{4}$ per $\frac{26}{3}$, la quale divisione si farà per lo secondo caso con moltiplicare $756\frac{3}{4}$ per 3, e con dividere il prodotto $2270\frac{1}{4}$ per 26; ed in questa maniera ritroverò, che il quoziente della divisione proposta debba essere $87\frac{33}{104}$.

168. Del rimanente nè pure per queste due operazioni si ha bisogno di dimostrazione alcuna; poichè essendo state ricavate dalle giuste nozioni, che dobbiamo farci della moltiplicazione, e della divisione, quando si tratta de' rotti, non può esservi dubbio veruno intorno alle medesime. E poichè le sudette due operazioni ancora quì sono d'indole contraria; si potrà per questa loro contrarietà ciascuna di esse esaminare per mezzo dell'altra. Saremo adunque sicuri, che il prodotto di $\frac{5}{6}$ moltiplicato per $\frac{2}{3}$ sia $\frac{5}{9}$ per la ragione, che dividendosi $\frac{5}{9}$ per $\frac{2}{3}$, si ritrova per quoziente l'istesso $\frac{5}{6}$. E similmente saremo certi, che il quoziente di $\frac{2}{5}$ diviso per $\frac{2}{3}$ sia $\frac{3}{5}$ per la ragione che moltiplicandosi $\frac{3}{5}$ per $\frac{2}{3}$ si ritrova per prodotto l'istesso $\frac{2}{5}$.

§. IV.

## §. IV.

*De' Rotti de' rotti, e del loro Algorismo.*

169. SIccome dalla divisione degli interi per lo più nascono rotti, così dalla divisione de' rotti per interi derivano talvolta altri rotti, i quali perciò possono chiamarsi rotti de' rotti. Così, dovendosi dividere 3 per 5, e non essendovi la quinta parte di 3, si avrà per quoziente $\frac{3}{5}$, che disegna tre quinte parti dell' unità; ma per la stessa ragione se si volesse dividere questo rotto $\frac{3}{5}$ per 4, non essendovi la quarta parte del suo numeratore 3, dovrebbe essere il quoziente un rotto di quel rotto, cioè un quarto di tre quinti. Ed in questa maniera egli è chiaro, che la costituzione de' rotti debba andare all' infinito, dimodocchè siccome vi sono rotti d' interi, così vi dovranno essere non solo rotti de' rotti, ma eziandio rotti de' rotti de' rotti, e così consecutivamente, senza esservi mai termine, per cui possa arrestarsi il loro progresso.

170. Intanto egli è facile colla regola data di sopra per la divisione de' rotti per qualche intero (153), di fare in modo, che tutti quest' altri rotti siano rotti immediati dell' unità. Imperocchè, qualora bisogna dividere $\frac{3}{5}$ per 4, secondo la riferita regola dovrà scriversi $\frac{3}{20}$ per quoziente di quella tal divisione; ma quantunque sì fatto quoziente di sua natura sia un quarto di tre quinti, tuttavolta ci rappresenta ancora tre ventesime parti dell' unità. E così parimente, se mai in appresso bisognasse dividere $\frac{3}{20}$ per 7, secondo la stessa regola si dovrebbe scrivere $\frac{3}{140}$ per quoziente, il quale se bene attesa la sua origine sia un settimo di un quarto di tre quinti, ad ogni modo ci addita ancora trecento quarantesime parti dell' unità.

171. Per questi rotti de' rotti egli è d'avvertirsi, che essi nascono non solo quando di un qualche rotto bisogna prenderne una parte, di cui non è capace il suo numeratore, ma ancora quando si debbono prendere di esso due, o più di sì fatte parti. Così non meno è rotto di rotto un quarto di tre quinti, che tre quarti di tre quinti; e così parimente sarà rotto di rotto di rotto tanto un settimo di un quarto di tre quinti, quanto tre settimi di un quarto di tre quinti, o pure tre settimi di tre quarti di tre quinti. Ma questi eziandio possono ridursi ad essere rotti semplici dell'unità. Imperocchè, siccome $\frac{3}{20}$ è un quarto di tre quinti, così il triplo di $\frac{3}{20}$, cioè $\frac{9}{20}$ saranno i tre quarti di tre quinti; ed ancora siccome $\frac{3}{140}$ è il settimo di un quarto di tre quinti, così $\frac{9}{140}$ saranno i tre settimi di un quarto di tre quinti, e $\frac{27}{140}$ saranno i tre settimi di tre quarti di tre quinti.

172. Affinchè possa aversi una regola generale per ridurre tutti questi rotti de' rotti ad essere rotti semplici dell'unità, giova quì l'avvertire, che siccome moltiplicandosi $\frac{3}{5}$ per $\frac{3}{4}$, si avranno per prodotto i tre quarti di tre quinti; così moltiplicandosi di nuovo quel prodotto per $\frac{3}{7}$, si avranno i tre settimi di tre quarti di tre quinti. Quindi, conforme per la moltiplicazione di due rotti regolarmente dee moltiplicarsi numeratore per numeratore, e denominatore per denominatore (159); così ogni rotto di rotto si ridurrà ad essere rotto semplice dell'unità, se registrati tutti i rotti, che lo esprimono, si moltiplichino insieme tanto i loro numeratori, quanto i loro denominatori, ed in questa maniera vedesi chiaramente, che un quarto di tre quinti riducesi a $\frac{3}{20}$, che tre quarti di tre quinti si riducono a $\frac{9}{20}$, che un settimo di un

quar-

quarto di tre quinti debba essere $\frac{3}{140}$, che tre settimi di un quarto di tre quinti debbano essere $\frac{9}{140}$, ed in fine che tre settimi di tre quarti di tre quinti debbano ridursi a $\frac{27}{140}$.

173. Egli è vero che questi rotti de' rotti rare volte s' incontrano secondo la primitiva loro origine; ma se mai ci venissero proposti in cotal guisa, e bisognasse o sommarli insieme, o sottrarre l' uno dall' altro, o pure moltiplicarli, e dividerli tra loro, in tal caso prima dovranno ridursi ad essere rotti semplici dell' unità, ed indi si porranno a calcolo colle regole date di sopra per gli rotti semplici. Così li tre quarti di due quinti si riducono a $\frac{6}{20}$, o pure a $\frac{3}{10}$, e la metà di cinque settimi si riduce a $\frac{5}{14}$; onde sarà $\frac{23}{35}$ la loro somma, $\frac{2}{35}$ la loro differenza, $\frac{3}{28}$ il loro prodotto, e $\frac{21}{25}$ il quoziente del primo diviso per lo secondo. E così ancora la metà di tre quarti di un terzo riducesi a $\frac{3}{24}$, o pure ad $\frac{1}{8}$, e li tre quinti di un terzo di cinque sesti si riducono a $\frac{15}{90}$, o pure ad $\frac{1}{6}$, con che sarà $\frac{7}{24}$ la loro somma, $\frac{1}{24}$ la loro differenza, $\frac{1}{48}$ il loro prodotto, e $\frac{3}{4}$ il quoziente del primo diviso per lo secondo.

174. Si può intanto dar caso, in cui sia precisamente necessario di venire alla considerazione di questi rotti de' rotti, e si è, quando i numeri interi disegnano cose, che anno ricevute presso gli Uomini non una, ma più determinate divisioni. Così il giorno dividesi in 24 ore, ciascuna ora suddividesi in 60 minuti primi, e ciascuno minuto primo si suddivide di nuovo in sessanta minuti secondi, dimodocchè l' ora è la ventiquattesima parte del giorno, il minuto primo è la sessagesima parte dell' ora, ed il minuto secondo è la sessantesima parte del minuto primo. Onde

se mai si volesse la settima parte di 30 giorni, in tal caso nel dividersi 30 per 7, non basta produrre per quoziente $4\frac{2}{7}$, ma bisogna esprimere quel rotto di un giorno con ore, minuti primi, e minuti secondi; e facendo così, per necessità verremo ad avere rotti de' rotti.

175. Si farà adunque la divisione delli 30 giorni per 7 in questa maniera. Dividasi primieramente 30 per 7, e siccome il quoziente è 4, così sarà 2 il residuo. Questi due giorni, che rimangono, riducansi ad ore, con moltiplicare 24 per 2; ed essendo ore 48, dividasi poscia 48 per 7, che darà 6 per quoziente, e 6 ancora per residuo. Questo nuovo residuo di sei ore riducasi a' minuti primi, con moltiplicare 60 per 6; ed essendo 360 minuti primi, dividasi 360 per 7, che darà 51 per quoziente, e 3 per residuo. Finalmente, dopo essersi ridotto quest' altro residuo di tre minuti primi a' minuti secondi colla moltiplicazione di 60 per 3, si dividerà 180 per 7, che darà 25 per quoziente, e 5 per residuo. Onde la settima parte di 30 giorni saranno 4 giorni, 6 ore, 51 minuti primi, 25 minuti secondi, e di più $\frac{5}{7}$ di un minuto secondo.

176. Similmente presso noi dividesi il ducato in 10 carlini, il carlino in 10 grani, ed il grano in 12 cavalli. Onde, se mai si dovesse prendere la terza parte di 50 ducati, non basta dire, che ella sia $16\frac{2}{3}$, ma bisogna esprimere quel rotto di ducato con carlini, grani, e cavalli; con che per necessità dee farsi uso de' rotti de' rotti. Dopo essersi adunque diviso 50 per 3, e ritrovato non meno il quoziente 16, che il residuo 2, si ridurranno a carlini quei due ducati d'avanzo, con moltiplicare 10 per 2; e si dividerà di poi 20 per 3, che darà 6 per quoziente, e 2 per residuo. Si ridurranno poscia a grani questi due carlini, che rimangono, con moltiplicare 10 per 2; e si dividerà 20 per 3, che darà similmente 6 per quozien-

ziente, e 2 per residuo. Finalmente questi due rimanenti grani si ridurrano a cavalli, con moltiplicare 12 per 2; e si dividerà 24 per 3, che darà 8 per quoziente esatto. Onde la terza parte di 50 ducati saranno 16 ducati, 6 carlini, 6 grani, ed 8 cavalli.

177. Nè egli è da porsi in dubbio, che con sì fatte divisioni si faccia uso de' rotti de' rotti. Imperocchè, quando diciamo, a cagion di esempio, 3 giorni, 5 ore, e 7 minuti primi, siccome 5 ore sono cinque ventiquattresimi di un giorno, così 7 minuti primi sono sette sessantesimi di un' ora, ed in conseguenza sette sessantesimi di un ventiquattresimo di un giorno. Ed ancora quando diciamo 10 ducati, 7 carlini, 9 grani, e 5 cavalli, siccome 7 carlini sono sette decimi di un ducato, così 9 grani sono nove decimi di un decimo di un ducato, e 5 cavalli sono cinque dodicesimi di un decimo di un decimo di un ducato. Ma per essere noti, e familiari agli Uomini i denominatori di quelle divisioni, e suddivisioni, che s'impiegano, si esprimono così i rotti semplici, come i rotti de' rotti a guisa d' interi; onde si è, che non solo non recano confusione alcuna, ma rappresentano con più rettezza quel tanto dee darsi a divedere.

178. Ed in effetto ancora gli Arimmetici prattici riguardano come interi questi tali numeri, co' quali sogliamo esprimere le parti di una qualche cosa, che ha ricevuto determinate divisioni; contentandosi di chiamarli numeri denominati, per distinguerli dalli veri interi. Anzi il costume ricevuto presso de' medesimi si è d'insegnare il loro Algorismo unitamente con quello degli interi; per non esservi bisogno di una espressa conoscenza della teoria de' rotti, per poterli o sommare insieme, o sottrarre l' uno dall'altro, o pure moltiplicarli, o dividerli per qualunque numero dato. Noi però avendo stimato più proprio di esporre quì la vera indole di sì fatti numeri, ancora in questo luogo diremo qualche cosa intorno

al loro Algorifmo ; ed in quefta maniera ſi vedrà facilmente, che l'artificio, che s'impiega per effi, non ſia niente diverſo da quello, che ſi pratica per gli altri numeri rotti.

179. Primieramente adunque per l'Algoriſmo de' numeri denominati egli è da notarſi, che ſiccome queſti tali numeri diſegnano varie ſpezie, l'una ſubordinata all'altra ; così biſogna tenere ſempre innanzi agli occhi la legge della loro ſubordinazione. Come trattandoſi de' numeri, che diſegnano giorni, ore, minuti primi, e minuti ſecondi, la legge della loro ſubordinazione ſi è, che 60 minuti ſecondi fanno un minuto primo, 60 minuti primi formano un'ora, e 24 ore danno un giorno. Similmente trattandoſi de' numeri, che diſegnano ducati, carlini, grani, e cavalli, la legge della loro ſubordinazione ſi è, che 12 cavalli fanno un grano, 10 grani formano un carlino, e 10 carlini coſtituiſcono un ducato. E queſta avvertenza corriſponde a queltanto ſi diſſe generalmente intorno a' rotti (119), cioè che eſſendo il numeratore di un rotto eguale al ſuo denominatore, debba il rotto medeſimo eſſere eguale all' unità, di cui egli è rotto.

180. In ſecondo luogo, ſiccome nello ſcrivere i numeri denominati, biſogna diſtinguerli per via di punti, affinchè quei di una ſpezie non ſi confondano con quei di un'altra ; così nell' addizione, e ſottrazione i medeſimi dovranno porſi l'uno ſotto l'altro con legge tale, che quei di una ſteſſa ſpezie tra loro ſi corriſpondano. Si farà poi la loro addizione, o ſottrazione con iſtituirne tante parziali, quante ſono le ſpezie, e con incominciare ſempre da quella de' numeri, che ſono della ſpezie infima. Ma conforme nell'addizione avendoſi una ſomma parziale, che giunge a formare una, o più unità della ſpezie ſeguente, ſi debbono queſte unità riſerbare per l'altra ſpezie, e notare ſolamente l'avanzo ; così nella ſottrazione, ſe mai dal numero di una ſpezie non poſſa toglierſi l'altro, che li corriſponde, dovrà prenderſi una unità dal nume-

mero della ſpezie ſeguente, e quella riſolverſi in tante parti, quante ne richiede la ſpezie, a cui ella dee ridurſi.

181. Debbanſi, a cagion di eſempio, unire inſieme i ſeguenti tre numeri denominati, che colle loro parti diſtinte per via di punti diſegnano ducati, carlini, grani, e cavalli. Dopo eſſerſi ſcritti i medeſimi in guiſa tale, che le parti di una ſteſſa ſpezie tra loro ſi corriſpondano; io ſommo

| | | | |
|---|---|---|---|
| 357. | 8. | 6. | 10 |
| 269. | 9. | 9. | 8 |
| 574. | 7. | 8. | 9 |
| 1202. | 6. | 5. | 3 |

primieramente i cavalli, li quali eſſendo in tutto 27, daranno 2 grani, e 3 cavalli d'avanzo; e perciò noto ſotta la linea ſolamente 3, e ſerbo i due grani per la ſomma ſeguente. Sommo di poi i grani, che inſieme colli due ſerbati fanno 25; e poichè queſta ſomma contiene 2 carlini, e 5 grani d'avanzo, noto ſotto la linea ſoltanto 5, e ſerbo i due carlini per l'altra ſomma, che ſegue. Onde, continuata l'operazione collo ſteſſo artificio, ritroverò per la ſomma, che ſi dimanda, 1202 ducati, 6 carlini, 5 grani, e 3 cavalli.

182. Debbaſi ſimilmente dal primo delli ſeguenti due numeri denominati togliere il ſecondo. Queſti ancora anno le loro parti diſtinte per via di punti, e ſi ſono ſituati altresì talmente l'uno ſotto l'altro, che ſi corriſpondono tra loro le parti di una medeſima ſpezie, cioè i ducati, i carlini, i grani, ed i cavalli. Tolgo adunque in primo luogo i 9 cavalli del numero inferiore dalli 7 dell'altro ſuperiore; e poicchè la ſottrazione non

| | | | |
|---|---|---|---|
| 956. | 5. | 6. | 7 |
| 398. | 9. | 8. | 9 |
| 557. | 5. | 7. | 10 |

può farsi, prendo un grano dalli 6 grani, che seguono, e risolvendolo in 12 cavalli, che insieme colli 7 fanno 19, tolgo 9 da 19, e scrivo sotto la linea il residuo 10. Indi dalli rimanenti 5 grani del numero superiore tolgo gli 8 dell' altro inferiore; e perchè nè pure la sottrazione può farsi, prendo un carlino dalli 5 carlini, che seguono, e risolvendolo in 10 grani, che insieme colli 5 fanno 15, tolgo 8 da 15, e scrivo il residuo 7 sotto la linea. Onde, continuata l' operazione col medesimo artificio, ritroverò per residuo totale della sottrazione proposta 557 ducati, 5 carlini, 7 grani e 10 cavalli.

183. Che se poi un qualche numero denominato debba prendersi più volte, ed in conseguenza moltiplicarsi per un vero numero; pure si faranno tante moltiplicazioni particolari, quante sono le spezie, con incominciare da quella della spezie infima; ma similmente si vuol avere l' avvertenza, che se un qualche prodotto parziale giunge a formare una, o più unità della spezie seguente, si debbano queste unità riserbare per l' altra spezie, e notare sotto la linea solamente l' avanzo. Così,

| 353. | 8. | 9. | 8 |
|---|---|---|---|
| | | | 5 |
| 1769. | 4. | 8. | 4 |

dovendosi moltiplicare l' apposto numero denominato, che colle sue parti, disegna ducati, carlini, grani, e cavalli, per lo vero intero 5, io moltiplico primieramente per 5 gli 8 cavalli; ed essendo il prodotto 40 cavalli, che fanno 3 grani, e 4 cavalli, io noto sotto la linea solamente 4, e serbo i 3 grani per lo prodotto seguente. Moltiplico di poi li 9 grani per 5; e siccome si producono 45 grani, che colli 3 serbati fanno 48, cioè 4 carlini, ed 8 grani, così scrivo 8 sotto la linea, e serbo i 4 carlini per lo prodotto, che segue. Onde, continuata l' operazione nella stessa maniera, ritroverò

verò per prodotto totale 1769 ducati, 4 carlini, 8 grani, e 4 cavalli.

184. Per quanto poi alla divisione di un qualche numero denominato per un vero intero, eziandio debbonsi fare tante divisioni parziali, quante sono le spezie; ma al contrario dee incominciarsi da quella della spezie più alta, per la ragione, che se in una di dette divisioni s'incontra qualche residuo, bisogna di quello tenerne conto nella divisione, che segue, con ridurlo all'immediata spezie inferiore. Così, dovendosi dividere per 5 il seguente numero denominato, che colle sue parti disegna ducati, carlini, grani, e cavalli, io divido

$$\frac{23.\ 9.\ 7.\ 8}{} \quad \frac{5}{4.\ 7.\ 9.\ 6\frac{2}{5}}$$

primieramente per 5 li 23 ducati; ed essendo 4 il quoziente, e 3 il residuo, io scrivo sotto la linea 4, e risolvo i rimanenti 3 ducati in 30 carlini, che insieme cogli altri 9 proposti fanno 39. Divido di poi 39 per 5; ed essendo 7 il quoziente, e 4 il residuo, noto 7 sotto la linea, e risolvo i restanti 4 carlini in 40 grani, che insieme cogli altri 7 proposti fanno 47. Onde, continuata l'operazione nella stessa guisa, ritroverò per quoziente totale 4 ducati, 7 carlini, 9 grani, 6 cavalli, e di più $\frac{2}{5}$ di un cavallo.

185. Finalmente, potendosi ogni numero denominato moltiplicare, o dividere per un vero intero, potrà farsi altresì la moltiplicazione, o divisione di esso per un vero rotto. In effetto, dovendosi un numero denominato moltiplicare per $\frac{2}{3}$, non dee farsi altra cosa, che prendere il doppio della terza parte di quel numero (157); onde con dividere il medesimo per l'intero 3, e con moltiplicare il quoziente per l'altro 2, si avrà il prodotto della moltiplicazione proposta. E così ancora, dovendosi un numero denominato divi-

dere per $\frac{3}{4}$, non dee farsi altra cosa, che prendere la terza parte del quadruplo di quel numero (161); onde con moltiplicare il medesimo per l'intero 4, e con dividere il prodotto per l'altro 3, si avrà il quoziente della proposta divisione. Ed ecco quanto basta intorno all'Algorismo de' numeri denominati; raggioneremo ora de' rotti decimali.

## §. V.

### *De' rotti decimali, e del loro Algorismo.*

186. ROtti decimali chiamansi quei, i di cui denominatori sono 10, 100, 1000, ed altri consimili; o pure le di cui parti sono decime, centesime, millesime, ed altre di questa fatta. E quantunque egli sembri, che tali rotti debbano distinguersi tra di essi, e chiamarsi decimali coloro, che anno per denominatore il 10, centesimali quegli altri, che anno per denominatore il 100, e così in appresso; nientedimeno si è dato a tutti il nome de' rotti decimali, per la ragione, che siccome i primi sono tali per rapporto all'unità, così i secondi sono decimali per rapporto a' primi, i terzi decimali a riguardo de' secondi, e così degli altri. In effetto $\frac{3}{10}$ sono tre decimi dell'unità, $\frac{3}{100}$ sono tre decimi di uno di quei decimi, $\frac{3}{1000}$ sono tre decimi di uno di quegli altri decimi, e così all'infinito. Onde i rotti decimali non solo sono rotti semplici dell'unità; ma contengono ancora rotti de' rotti.

187. La considerazione di questi rotti decimali, secondo fu avvertito di sopra (150), è derivata dallo stabilimento fatto dagli Arimmetici intorno al valore locale de' caratteri per esprimere ogni qualunque numero intero. Imperocchè, aumentandosi quel valore sempre nel decuplo; chiaro si è, che qualora un numero intero è espresso con molti caratteri accoppiati insieme, il valore di ciascu-

no di essi può considerarsi come rotto decimale per rapporto al valore del carattere, che segue. Così nell'intero 73564 le quattro unità, che disegna il primo carattere, sono quattro decimi di ciascuna delle sei diecine disegnate dal secondo; e queste sei diecine sono sei decimi di ciascuno delle cinque centinaja disegnate dal terzo; come ancora queste cinque centinaja sono cinque decimi di ciascuno delle tre migliaja disegnate dal quarto; e queste tre migliaja sono tre decimi di ciascuna delle sette diecine di migliaja disegnate dal quinto.

188. Adunque questa tal riflessione ha indotto gli Arimmetici a considerare più dappresso i veri rotti decimali; come quelli, che sono conformi all'indole de' valori locali, che ricevono i caratteri, quantevolte insieme si accoppiano. E siccome con quel tale stabilimento fu agevole ad essi disegnare con pochi caratteri tutti i numeri interi possibili; così per una conseguenza molto naturale dello stesso stabilimento gli è riuscito altresì esprimere i veri rotti decimali colli soli numeratori, senza aver bisogno di additare ancora i loro denominatori. Imperocchè, con apporre altri luoghi avanti a quello delle unità, per necessità i valori de' caratteri, che in quelli si situeranno, dovranno andarsi minorando sempre nel decuplo. Onde il primo di essi disegnerà tanti decimi dell' unità, il secondo tanti decimi di uno di que' decimi, il terzo tanti decimi di uno di quegli altri decimi, e così all'infinito.

189. Essendo così, egli è chiaro, che per esprimere con caratteri continuati tanto i numeri interi, quanto i veri rotti decimali, non debba farsi altra cosa, se non se prima notare il luogo delle unità, e distinguerlo con qualche segno, il quale suol' essere una virgola posta al rovescio; indi per rapporto a quei luoghi considerarne, così altri, che lo seguano, come altri, che lo procedano. Imperocchè, conforme i valori de' caratteri posti ne' primi si vanno aumentando sempre nel decuplo, ed in conseguenza ci disegnano con ordine

die-

diecine, centinaja, migliaja di unità; così per lo contrario i valori de' caratteri situati ne' secondi si anderanno minorando sempre nel decuplo, e pertanto ci additeranno ordinatamente parti decime, centesime, millesime dell' unità, che sono i veri rotti decimali.

190. Per ragion di esempio supposto, che in questo numero 356'47 il luogo dell' unità sia quello, in cui stà apposta la virgola, già i tre caratteri, che sono a sinistra di detta virgola, debbono disegnare trecento cinquantasei unità; ma degli altri due, che sono a destra, il primo 4 disegnerà quattro decimi delle unità, ed il secondo 7 sette centesimi; onde tutto il numero conterrà trecento cinquantasei unità, e di più così quattro decimi, come sette centesimi di una di esse. E per la stessa ragione quest' altro numero 2567'347, in cui il luogo delle unità similmente è quello, che vien preceduto dalla virgola, conterrà duemila cinquecento sessantasette unità, e di più tre decimi, quattro centesimi, e sette millesimi di una di esse.

191. Notisi quì intanto, che per profferire più brevemente tutti i rotti decimali disegnati da caratteri, che precedono il luogo delle unità, giova ridurli alla stessa denominazione secondo la regola speziale data di sopra (129). Così nel numero 356'47, che contiene interi, e rotti decimali, i quattro decimi disegnati dal 4 sono l' istesso, che quaranta centesimi; onde potrà dirsi, che detto numero contenga trecento cinquantasei unità, e quarantasette centesimi di una di esse. E così ancora in quest' altro numero 2567'347, che similmente contiene interi, e rotti decimali, i tre decimi disegnati dal 3 sono l' istesso, che trecento millesimi, ed i quattro centesimi disegnati dal 4 sono l' istesso, che quaranta millesimi; onde potrà dirsi, che detto numero contenga duemila cinquecento sessantasette unità, e trecento quarantasette millesimi di una di esse.

192. Egli è vero, che i rotti decimali possono tal-

talvolta ritrovarsi soli, e non essere accoppiati con altri numeri interi; ma ancora in questo caso niente costa disegnarli nella stessa guisa, bastando notare colla virgola il luogo, ove dovrebbero essere situate le unità, ed indi apporre ne' luoghi, che lo precedono, i numeratori di essi rotti decimali. Così, per disegnare tre decimi dell' unità, potrà scriversi '3. Similmente per disegnare tre decimi, e cinque centesimi, o pure trentacinque centesimi dell' unità, potrà notarsi '35. E così finalmente per disegnare tre decimi, cinque centesimi, e sette millesimi, o pure trecento cinquantasette millesimi dell' unità, si potrà scrivere '357. Onde da quì innanzi, quando si veggono numeri preceduti da una virgola, debbono i medesimi interpetrarsi per veri rotti decimali.

193. Or sebbene i numeri interi, giusta l' avvertimento fatto di sopra (39), debbono sempre incominciare con qualche carattere significativo; nientedimeno quei, che disegnano rotti decimali, possono talvolta incominciare con uno, o più zeri. Imperocchè, siccome per esprimere trentacinque centesimi, che sono tre decimi, e cinque centesimi, bisogna scrivere '35; così per disegnare solamente cinque centesimi, è necessario, che si scriva '05. E per la stessa ragione conforme per esprimere trecento cinquantasette millesimi, che sono tre decimi, cinque centesimi, e sette millesimi, si dee scrivere, '357; così dovrà scriversi '057 per disegnare cinquantasette millesimi, e '007 per disegnare sette soli millesimi. Dipende adunque l' avvertimento fatto da ciò, che il primo luogo avanti la virgola dee essere occupato da decimi, il secondo da centesimi, il terzo da millesimi, e così all' infinito.

194. Siccome i rotti decimali si esprimono a guisa d' interi, così il loro Algorismo può farsi eziandio colle stesse regole, che si sono date per l' Algorismo degli interi. Ed in primo luogo, per quanto tocca alla loro addizione, e sottrazione, non altro si vuol avvertire, se non che essi deb-

bonsi

bonsi scrivere talmente l'uno sotto l'altro, che i luoghi delle unità disegnati dalle virgole si corrispondano tra loro. Ciò facendo, non v'ha dubbio, che se vi sono interi, si ritroveranno corrispondenti non menò le unità alle unità, che le diecine alle diecine, le centinaja alle centinaja, e così in appresso. Ma con scriverli in quella guisa, chiaro ancora si è, che per quanto riguarda i rotti, corrisponderanno parimente i decimi dell'uno alli decimi dell'altro, i centesimi alli centesimi, e così consecutivamente. E se mai uno de numeri abbia qualche carattere di più, o a destra, o a sinistra; sarà zero il carattere, che li corrisponderà nell'altro numero.

195. Debbansi adunque sommare insieme i due numeri 3564'67, 495'864, che contengono interi, e rotti decimali. Dopo essersi situati nella maniera esposta, tirisi sotto di essi la linea. E poicchè alli quattro millesimi del secondo non corrispondono nel primo altri millesimi, pongasi 4 sotto la linea per somma de' millesimi. Congiun-

| |
|---:|
| 3564'67 |
| 495'864 |
| 4060'534 |

gansi di poi i sei centesimi del secondo colli sette centesimi del primo; ed essendo in tutto tredeci centesimi, cioè un decimo, e tre centesimi, scrivasi 3 sotto la linea nel luogo de' centesimi, e serbisi quel decimo per gli altri decimi, che seguono. Si sommino poscia gli otto decimi del secondo cogli altri sei del primo, ed aggiungendo alla loro somma il decimo serbato, saranno in tutto quindici decimi, cioè cinque decimi, ed una unità; e perciò serbata l'unità per l'altre unità, che seguono, notisi 5 sotto la linea nel luogo de' decimi. Onde, continuata l'operazione negli interi, che vengono in appresso, sarà 4060'534 la somma, che si dimanda.

196. Deb-

196. Debbasi ancora dal numero maggiore 5734'36 sottrarre l'altro minore 479'786. Dopo essersi situati nella maniera esposta, tirisi sotto di essi la linea. E poichè non si ritrovano nel primo millesimi, da' quali si possano togliere i sei millesimi del secondo, si prenderà uno delli sei centesimi,

5734'36
479'786

5254'574

che vi sono, e si ridurrà a dieci millesimi; onde tolto 6 da 10, si scriverà il residuo 4 sotto la linea del luogo de' millesimi. Aggiunto poscia quel centesimo preso agli altri otto del secondo, si toglieranno nove centesimi da sei centesimi, e poichè non può farsi la sottrazione, si prenderà uno delli tre decimi, che seguono, il quale si ridurrà a dieci centesimi, e perciò togliendo 9 da 16, si scriverà il residuo 7 sotto la linea nel luogo de' centesimi. Quindi, aggiunto ancora quel decimo preso agli altri sette del secondo, si toglieranno in appresso otto decimi da tre decimi; e poichè la sottrazione neppure può farsi, si prenderà una delle quattro unità, che seguono, e si ridurrà a dieci decimi; con che tolto 8 da 13, si scriverà il residuo 5 sotto la linea nel luogo de' decimi. Onde, continuata l'operazione negli interi, che seguono, sarà 5254'574 il residuo totale della sottrazione proposta.

197. Per quanto poi alla moltiplicazione di tali numeri, questa ancora può farsi con moltiplicare tra loro i numeri dati, come se fossero interi; e tutta la difficoltà, che in essa s'incontra, consiste in distinguere nel prodotto il vero luogo delle unità. Perciò giova riflettere, che siccome il numero 35'67, che contiene propriamente trentacinque unità, sei decimi, e sette centesimi, riducesi a trentacinque unità, e sessantasette centesimi; così perchè trentacinque unità sono l'istesso,

so, che tremila cinquecento centesimi, potrà ridursi l'istesso numero a tremila cinquecento sessantasette centesimi. Onde ancora quest' altro numero 56'349 riducesi a cinquantaseimila trecento quarantanove millesimi. E generalmente con profferire insieme i caratteri tanto degli interi, quanto de' rotti decimali, come se appartenessero ad un medesimo numero, potrà ascriversi al valore di tutti insieme il denominatore degli stessi rotti decimali.

198. Or siccome in questa maniera i numeri, che si debbono moltiplicare insieme si riducono ad essere puri rotti decimali; così il loro prodotto dovrà essere un'altro rotto decimale, il di cui numeratore si avrà colla moltiplicazione degli stessi numeri considerati come interi, ed il denominatore colla moltiplicazione de'loro denominatori (159). E poicchè per l'indole de'rotti decimali (186), ciascuno di questi denominatori è espresso coll' unità preceduta da uno, o più zeri; chiaro si è, che ancora il loro prodotto dovrà essere espresso colla stessa unità preceduta da tanti zeri, quanti ne contengono i due denominatori, che si debbono moltiplicare insieme (86). Onde colla riduzione de' rotti ad interi non si durerà fatica in comprendere, che si distinguerà nel prodotto delli due numeri proposti il vero luogo delle unità, con separare a destra tanti caratteri, quanti se ne veggono separati in amendue i numeri, che si sono moltiplicati insieme.

199. Debbasi, per ragion di esempio, moltiplicare 35'67 per 4'5, Io dico, che il prodotto debba essere 160'515. Imperocchè, essendo 35'67 l'istesso, che 3567 centesimi, ed essendo ancora 4'5 l' istesso, che 45 decimi; la medesima cosa farà moltiplicare 35'67 per 4'5, che moltiplicare 3567 centesimi per 45 decimi. Or siccome moltiplicando 3567 per 45, si produce 160515, così colla moltiplicazione di 100 per 10, si produce 1000; onde il prodotto, che si dimanda, dovrà contenere 160515 millesimi. E poicchè i 515 millesimi co-

costituiscono un vero rotto decimale, e gli altri 160000 si riducono a 160 unità; conterrà l'istesso prodotto 160 unità, e 515 millesimi di una di esse; onde la sua espressione sarà 160'515, in cui si ritrovano separati a destra tre caratteri, appunto per gli tre caratteri, che si veggono separati in amendue i numeri proposti.

200. Dell' istessa maniera si pruoverà, che dovendosi moltiplicare 35'654 per 2'5, il prodotto debba essere 89'1350; e che bisognando moltiplicare 47'507 per 3'05; debba prodursi 144'89635: dimodochè, secondo è stato avvertito, la regola generale per la moltiplicazione di questi numeri si è, di moltiplicarli tra loro come se fossero interi, ed indi distinguere nel prodotto il vero luogo delle unità, con separare a destra tanti caratteri, quanti se ne veggono separati in amendue i numeri proposti. Nè altrimenti dovrà farsi, se o uno delli due numeri dati, o ciascuno di essi contenesse soli rotti decimali. Imperocchè, siccome il prodotto di 9'36 per '4 dee essere 3'744; così sarà '304 quello di '76 per '4, e '16732 quello di '356 per '47.

201. Intorno alla regola data per distinguere nel prodotto delli due numeri proposti il vero luogo delle unità, più cose debbonsi avvertire, che possono dedursi dagli stessi principj. La prima si è, che se mai uno delli due numeri sia vero intero, in tal caso i caratteri da separarsi nel prodotto debbono essere tanti, quanti se ne veggono separati nell' altro numero; così il prodotto di 23'7 per 5 sarà 118'5, e quello di 23'76 per 4 sarà 95'04. L' altra si è, che se mai nel prodotto non vi siano tanti caratteri, quanti bisogna separarne per la regola data, dovrà supplirsi il carattere mancante col zero, che si situerà immediatamente innanzi al luogo delle unità; così il prodotto di '34 per '2 sarà '068, e quello di '03 per '02 sarà '0006. La terza si è, che i caratteri separati in virtù della regola possono talvolta, o ridursi ad un numero minore, o affatto togliersi; così il pro-

prodotto di 3'6 per '5, dovendo essere 1'80, riducesi ad 1'8; e quello di 3'25 per 4, dovendo essere 13'00, riducesi a 13.

202. Finalmente per quanto alla divisione de' medesimi numeri, questa similmente può farsi con dividere i numeri dati, come se fossero interi: ma siccome nella moltiplicazione di due di essi si distingue nel prodotto il vero luogo delle unità, con separare a destra tanti caratteri, quanti se ne veggono separati in amendue i numeri, così nella divisione di un numero per l'altro si distinguerà nel quoziente l'istesso luogo delle unità col separarne tanti, quanti nel dividendo se ne veggono separati di più per rapporto a' quei del divisore. In effetto, se moltiplicando 35'67 per 4'5, si produce 160'515; per necessità, con dividere 160'515 per 4'5, dee aversi per quoziente 35'67. E similmente, se moltiplicando '356 per '47, si produce 16732; forzosamente, con dividere '16732 per '47, dee nascere il quoziente '356.

203. Estendo così, si vede in primo luogo, che se tanti caratteri siano separati nel dividendo, quanti ne sono nel divisore, l'istesso primo carattere del quoziente debba essere il vero luogo delle unità; come in effetto il quoziente, che nasce, dividendo 62'4 per 2'6 dee essere 24; ed il quoziente, che risulta, dividendo 1928'88 per 3'42, dee essere 564. Si vede ancora, che se mai il divisore sia vero numero intero, nè abbia in conseguenza carattere alcuno separato, debbano separarsi nel quoziente tanti caratteri, quanti se ne veggono separati nel dividendo: qual cosa si rende chiara cogli stessi esempj di sopra; poichè se con dividere 62'4 per 2'6, si ha 24 per quoziente, dovrà per lo contrario essere 2'6 il quoziente, che nasce dalla divisione 62'4 per 24; ed ancora se con dividere 1928'88 per 3'42 si ha per quoziente 564, dovrà al contrario essere 3'42 il quoziente, che risulta dalla divisione di 1928'88 per 564.

204. Potrebbe intanto avvenire, che i caratteri separati del dividendo siano di minor numero

per

per rapporto a quei del divisore; ed in questo caso per avere nel quoziente il vero luogo delle unità, in vece di separare caratteri, bisogna apporre a destra di quello tanti zeri, quanti caratteri si veggono separati di più nel divisore. Così, dovendosi dividere 72'8 per 3'64, il quoziente sarà 20; poichè sebene dalla divisione di quei numeri considerati come interi ne risulti 2 per quoziente, tuttavolta ritrovandosi separato nel divisore un carattere di più, dovrà apporsi a quel 2 un zero a destra per avere il vero luogo delle unità. E l' istesso dee farsi, se il dividendo sia vero numero intero, nè abbia in conseguenza carattere alcuno separato; poichè al quoziente dovranno apporsi a destra tanti zeri, quanti caratteri si veggono separati nel divisore; onde si è, che dalla divisione di 1068 per 3'56 debba risultarne 300 per quoziente.

205. Del rimanente, se nella divisione de' numeri, che contengono rotti decimali, s' incontri qualche residuo, questo dovrà darci uno de' rotti ordinarj, il quale si rapporterà ad una delle parti del rotto decimale contenuto nel quoziente. Così, dovendosi dividere 3'26 per 2'3, il quoziente sarà 1'4$\frac{4}{23}$, in cui il rotto $\frac{4}{23}$ si riferisce ad uno delli quattro decimi, che vi sono; e similmente bisognando dividere 5'356 per 2'3, si ritroverà per quoziente 2'32$\frac{20}{23}$, in cui il rotto $\frac{20}{23}$ si rapporta ad uno delli 32 centesimi contenuti nell'istesso quoziente. Ma se il quoziente, che si ritrova, non contenga rotto decimale, in tal caso quel rotto ordinario dovrà riferirsi all' unità; siccome avviene dovendosi dividere 84'78 per 3'25, poichè essendo il quoziente 26$\frac{28}{325}$, si rapporterà questo rotto $\frac{28}{325}$ ad una delle 26 unità, che sono nel quoziente.

206. Essendo adunque così spedito l' Algorismo de' rotti decimali, sarebbe certamente da desiderarsi, che ogn' altro rotto potesse prendere la forma di alcuno di essi; ma non può darsi tal forma,

ſe non ſe a que' ſoli rotti, i di cui denominatori ſono diviſori eſatti di uno de' denominatori de' rotti decimali. Così, eſſendo $\frac{1}{2}$ il rotto propoſto, io ritrovo, che il ſuo denominatore 2 ſia diviſore eſatto di 10, e che dividendo 10 per 2 ſi abbia il quoziente 5; onde moltiplicando per queſto 5 così il numeratore, come il denominatore di $\frac{1}{2}$, ſi ridurrà egli a $\frac{5}{10}$, o pure a '5. E così ancora avendoſi queſt' altro rotto $\frac{3}{4}$, io ritrovo, che il ſuo denominatore 4 ſia diviſore eſatto di 100, e che dividendo 100 per 4, ſi abbia 25 per quoziente; onde moltiplicando per queſto 25 tanto il numeratore, quanto il denominatore di $\frac{3}{4}$, ſi ridurrà egli a $\frac{75}{100}$, o pure a '75.

207. Intanto per via di approſſimazione ſi potrebbe dar forma di rotto decimale ad ogni qualunque rotto; come in effetto non traſcurano di farlo i Matematici, qualora l'indole della coſa, di cui ſi tratta, permette, che del dato rotto poſſa traſcurarſi qualche minuzia. Per eſeguirlo, baſterà coll' aggiunta di alcuni zeri aumentare il valore del numeratore del rotto propoſto, ed indi dividerlo così aumentato per lo ſuo denominatore; poichè il quoziente intero di queſta diviſione ſarà il numeratore del rotto decimale, a cui il dato rotto ſi avvicina; e vi ſi approſſimerà egli tanto maggiormente, quanto maggiore ſarà l'aumento, che riceve il ſuo numeratore. Così eſſendo $\frac{2}{3}$ il rotto propoſto, potremo apporre tre zeri al 2, ed indi dividere 2000 per 3; e poichè ritrovaſi per quoziente intero 666, ſarà $\frac{2}{3}$ non molto minore di '666; ma volendoci approſſimare davantaggio, ſi potrebbero apporre altri zeri all' iſteſſo 2, ed all' ora con dividerlo ancora per 3, ſi ritroverebbe un rotto decimale maggiore.

CA-

## CAPITLO III.

### *Delle Potenze, e Radici de' numeri.*

208. Siccome un numero può moltiplicarsi per uno, o più numeri, che siano da esso diversi; così niente osta, che si moltiplichi egli per se stesso, non solo una volta, ma più volte ancora consecutivamente. Questa reiterata moltiplicazione di un numero per se medesimo ha dato luogo agli Arimmetici di considerare le varie potenze de' numeri. Imperocchè, conforme ogni numero dicesi essere la prima sua potenza; così moltiplicandosi egli per se stesso una volta si produrrà la seconda sua potenza, moltiplicandosi due volte si produrrà la terza potenza del medesimo, e così all' infinito. Quindi del numero 3 la prima potenza è l' istesso 3, la seconda è 9, la terza è 27, la quarta è 81, e così in appresso; e similmente del numero 5 la prima potenza è l' istesso 5, la seconda è 25, la terza è 125, la quarta è 625, e così dell' altre.

209. Derivando tutte le altre potenze dalla prima, che è l' istesso numero proposto, quindi si è, che si è dato ancora a quella il nome di radice: la quale però siccome dicesi radice prima, qualora si rapporta alla prima potenza, da cui effettivamente non differisce; così riceve le dinominazioni di radice seconda, terza, o quarta, secondocchè si riferisce alla seconda, terza, o quarta potenza. Quindi il numero 3, che è radice prima di se medesimo, dovrà dirsi radice seconda per rapporto al 9, radice terza per rapporto al 27, e radice quarta per rapporto all' 81; e similmente il numero 5, che è radice prima di se stesso, sarà radice seconda di 25, radice terza di 125, e radice quarta di 625. Intanto giova quì l' avvertire, che siccome ogni potenza dell' unità è sempre 1, così ogni sua radice debba essere ancora 1.

210. Or tra le potenze de' numeri più spezial-

mente considerano gli Arimmetici la seconda, e la terza, delle quali con nomi presi dalla Geometria l'una chiamano quadrato, e l'altra cubo; onde si è, che la loro radice vien detta ancora da essi radice quadrata, qualora si rapporta al quadrato, e radice cuba, quantevolte si riferisce al cubo. Ciò, che poi s'insegna intorno a questo argomento, riducesi a due teorie: cioè prima a far vedere, come di un dato numero, per quanto egli sia composto, possa formarsi facilmente tanto il quadrato, quanto il cubo; ed indi a dimostrare, come per lo contrario, considerando un numero a guisa di quadrato, o a guisa di cubo, possa ritrovarsi la sua radice sia quadrata, sia cuba. Onde si è, che la prima di queste due teorie riguarda la formazione, o sia composizione del quadrato, e del cubo; e la seconda la loro risoluzione, che si appella comunemente estrazione di radice.

## §. I.

### *Della Composizione del quadrato.*

211. Il quadrato di un numero qualsivoglia, come seconda sua potenza, formasi propriamente con moltiplicare il numero proposto una volta per se medesimo; così il quadrato di 3 sarà 9, quello di 4 sarà 16, quello di 5 sarà 25, e così in appresso. Ma poichè questa moltiplicazione, che è facile a farsi, quantevolte il numero è semplice, riesce alquanto nojosa per poco, che il numero sia composto; perciò affin di scemare il tedio di essa, giova esaminare quali siano le parti del quadrato di un numero composto, e quale sia altresì la loro situazione: dal quale esame ricaveremo ancora altro vantaggio, e si è, che per mezzo di esso sarà egli facile in appresso d'intendere l'artificio, che suol pratticarsi per estrarre la radice di un numero, che si vuol considerare come quadrato.

212. Ed in primo luogo, essendo l'istesso moltipli-

tiplicare un numero per un'altro numero, che moltiplicare separatamente le suè parti per quello stesso numero, possiamo stabilire questo teorema, cioè che essendo un numero composto di due, o più parti, il prodotto di esso per ogn'altro numero sia eguale alla somma de' prodotti, che si avranno, moltiplicando ciascuna sua parte per lo stesso numero. Così supposto, che il numero 10 sia composto dalle due parti 4, e 6; sarà il prodotto di 10 per 5 eguale al prodotto di 4 per 5, ed al prodotto di 6 per 5. Similmente supposto, che l'istesso numero 10 sia composto dalle tre parti 2, 3, e 5, sarà il prodotto di 10 per 6 eguale al prodotto di 2 per 6, al prodotto di 3 per 6, ed al prodotto di 5 per 6.

213. Ma l'istesso è ancora moltiplicare un numero per un'altro numero, che moltiplicare separatamente ciascuna parte del primo per ciascuna parte del secondo; onde possiamo più generalmente stabilire in secondo luogo quest'altro teorema, cioè che se ciascuno di due numeri sia composto di parti, il loro prodotto debba essere eguale alla somma de' prodotti, che si avranno, moltiplicando ciascuna parte del primo per ciascuna parte del secondo. Così supposto, che le parti di 10 siano 4, e 6, e che quelle di 5 siano 2, e 3; sarà il prodotto di 10 per 5 eguale a quattro prodotti fatti da 4 per 2, da 4 per 3, da 6 per 2, e da 6 per 3. E similmente supposto, che le parti di 10 siano come prima 4, e 6, e che quelle di 8 siano 1, 2, e 5; sarà il prodotto di 10 per 8 eguale a sei prodotti, cioè a tre fatti da 4 per 1, da 4 per 2, e da 4 per 5, e ad altri tre fatti da 6 per 1, da 6 per 2, e da 6 per 5.

214. Suppongasi ora, che il numero sia composto di due parti, e che debba egli moltiplicarsi per se medesimo. Il prodotto adunque, che si avrà, in virtù del secondo teorema, dovrà contenere quattro prodotti, cioè uno della prima parte per se stessa, il secondo della prima parte per la seconda, il terzo della seconda parte per la prima, ed

il quarto della seconda parte ancora per se stessa.
Ma siccome dalla moltiplicazione del numero per se medesimo ne risulta il suo quadrato, così dalla moltiplicazione delle parti per loro stesse si avranno ancora i loro quadrati. Onde si è, che possiamo altresì stabilire un terzo teorema, cioè che essendo un numero composto di due parti, il suo quadrato debba essere eguale alli quadrati delle due parti, e a due volte il prodotto delle medesime parti.

215. Or questo teorema è quello, del quale dee farsi uso per l'argomento, di cui si tratta; ed in virtù di esso si avrà il quadrato di un numero composto di due parti, con prendere i quadrati delle due parti, e con aggiungere alla loro somma due volte il prodotto delle medesime parti. Così, supposto, che le parti di 8 siano 3, e 5, io prendo primieramente i quadrati di 3, e 5, che sono 9, e 25; indi aggiungo ad essi due volte il prodotto di 3 per 5, che è 15; e siccome 9, 25, 15, e 15 insieme fanno 64, così sarà 64 il quadrato di 8. Similmente supposto, che le parti di 10 siano 4, e 6, io prendo così i quadrati di 4, e 6, che sono 16, e 36, come due volte il prodotto di 4 per 6, che è 24; e poichè 16, 36, 24, e 24 insieme fanno 100, sarà 100 il quadrato del numero 10.

216. Prima però di passare innanzi, notisi in questo luogo, che siccome il quadrato dell'unità è ella medesima, così il prodotto di ogni numero per la stessa unità è il medesimo numero. Essendo così, possiamo dal riferito teorema dedurre questa conseguenza, cioè che se al quadrato di un numero intero qualsivoglia si aggiunga il duplo dell'istesso numero, e di più l'unità, si avrà il quadrato del numero intero, che segue. Così al quadrato di 3, che è 9, aggiungendo il duplo dell'istesso 3, che è 6, e di più l'unità, si avrà 16, che è il quadrato di 4, consecutivo al 3. E similmente al quadrato di 5, che è 25, aggiungendo il duplo dell'istesso 5, che è 10, e di più

l'uni-

l' unità, si avrà 36, che è il quadrato di 6, consecutivo al 5.

217. Quindi siccome si è stimato da alcuni molto profittevole di formare una tavola, in cui si contenessero i quadrati de' numeri interi persino a quello di 1000, o pure più innanzi, per averli pronti nel bisogno; così volendosi sì fatta tavola, potrà ella formarsi facilmente per mezzo della sola addizione. Imperocchè, tralasciando i quadrati de' primi dieci numeri, come facili a farsi, ed incominciando da quello di 10, che è 100; se ad esso aggiungeremo il duplo di 10, che è 20, e di più l' unità, avremo 121, che è il quadrato di 11; e se a 121 aggiungeremo poscia il duplo di 11, che è 22, e di più l' unità, avremo 144, che è il quadrato di 12; ed ancora se a 144 aggiungeremo in appresso il duplo di 12, che è 24, e di più l' unità, avremo 169, che è il quadrato di 13. Onde, andando avanti sempre collo stesso artificio, formeremo l' intera tavola, che si dimanda.

218. Per ritornare ora al nostro proposito, uopo è spiegare più minutamente, come per mezzo del riferito teorema possa farsi il quadrato di qualunque numero composto. Ed in primo luogo egli è da sapersi, che siccome i quadrati de' numeri semplici debbono formarsi colla moltiplicazione effettiva; così se il numero composto sia espresso con un sol carattere significativo, e con uno, o più zeri, che lo precedano, si avrà il suo quadrato con fare quello del carattere significativo, e con apporgli il duplo de' zeri, che sono nel numero (86). Essendo adunque 4 il quadrato di 2, sarà 400 il quadrato di 20; 40000 il quadrato di 200, 4000000 il quadrato di 2000, e così in appresso. E similmente essendo 9 il quadrato di 3, sarà 900 il quadrato di 30, 90000 il quadrato di 300, 9000000 il quadrato di 3000, e così all' infinito.

219. Quindi i caratteri, che debbono esprimere il quadrato di un numero composto, non mai possono essere tanti, che oltrepassino il duplo di quelli, che esprimono il numero medesimo. Impe-

perocchè, essendo 100 il quadrato di 10, per necessità il quadrato di ogn' altro numero disegnato con un sol carattere dovrà essere minore di 100, e perciò non mai potrà essere espresso con tre caratteri. Similmente essendo 10000 il quadrato di 100, forzosamente il quadrato di ogn' altro numero disegnato con due caratteri dovrà essere minore di 10000, e pertanto non mai potrà essere espresso con cinque caratteri. E così ancora, essendo 1000000 il quadrato di 1000, egli è fuor di ogni dubbio, che il quadrato di ogn' altro numero disegnato con tre caratteri debba essere minore di 1000000, ed in conseguenza non mai potrà essere espresso con sette caratteri.

220. Egli è ancora da sapersi, che quel compendio, il quale pratticasi in fare il quadrato di un numero espresso con un sol carattere significativo, e con uno, o più zeri, che lo procedono, ha luogo parimente, quando sono due, o più i caratteri significativi del numero proposto; poichè con fare il quadrato del numero espresso colli soli caratteri significativi, e con apporgli il duplo de' zeri, che sono nel dato numero, si avrà il quadrato, che si dimanda. Così, essendo 529 il quadrato di 23, sarà 52900 quello di 230, e 5290000 l'altro di 2300; ed ancora essendo 55225 il quadrato di 235, sarà 5522500 quello di 2350, e 552250000 l'altro di 23500. Onde tutta la difficoltà consiste in fare i quadrati de' numeri, che sono espressi con due, o più caratteri significativi.

221. E primieramente, essendovi un numero espresso con due caratteri significativi, e volendosi il suo quadrato, non dovrà farsi altra cosa, se non che considerare come parti di quel numero i valori locali de' suoi caratteri, ed indi alli quadrati di dette parti aggiungere il duplo del loro prodotto. Così, essendo 35 il numero proposto, saranno 30, e 5 le sue parti; e poichè i quadrati di queste parti sono 900, e 25, ed il duplo del loro prodotto è 300, aggiungansi insieme questi tre numeri 900, 300, e 25, e la loro somma

ma 1225 sarà il quadrato di 35. Similmente, essendo 47 il dato numero, saranno 40, e 7 le sue parti, delle quali i quadrati sono 1600, e 49. ed il duplo del loro prodotto è 560; onde la somma di questi tre numeri 1600, 560, e 49, cioè 2209 sarà il quadrato di 47.

222. Che se poi il numero sia espresso con tre caratteri significativi, si dovrà egli considerare similmente come composto di due parti, delle quali una sarà il valore del primo carattere, e l'altra il valore locale degli altri due; e si avrà il quadrato di detto numero, con aggiungere parimente alli quadrati delle sue parti il duplo del loro prodotto. Così, essendo 235 il numero proposto, le sue parti saranno 230, e 5; onde, perchè i quadrati di queste parti sono 52900, e 25, ed il duplo del loro prodotto è 2300, sarà la somma di questi tre numeri 52900, 2300, e 25, cioè 55225 il quadrato di 235. E così ancora essendo 354 il dato numero, saranno 350, e 4 le sue parti, delle quali i quadrati sono 122500, e 16, ed il duplo del loro prodotto è 2800; con che la somma di questi tre numeri 122500, 2800, e 16, cioè 125316 sarà il quadrato di 354.

223. Or dell'istessa maniera, essendo il numero espresso con quattro caratteri significativi, dovrà egli considerarsi come composto di due parti, delle quali una sarà il valore del primo carattere, e l'altra il valore locale degli altri tre; e si avrà il suo quadrato eziandio con aggiungere alli quadrati di dette parti il duplo del loro prodotto. Nè altrimenti dovrà farsi, se più di quattro fossero i caratteri significativi del numero proposto; poichè siccome si potrà riguardare come una delle sue parti il valore del primo carattere, e come altra parte il valore locale degli altri, che seguono, così con fare i quadrati di dette parti, e con aggiungergli il duplo del loro prodotto, si avrà il quadrato, che si dimanda.

224. Intanto con questo metodo non potrà farsi il quadrato di un numero espresso con molti carat-

ratteri significativi, se prima non si sappiano formare i quadrati di coloro, che sono espressi con più pochi caratteri. In effetto, volendosi il quadrato di 2354, formeremo prima quello di 23, con aggiungere alli quadrati di 20 e 3 il duplo del loro prodotto; ed essendo questo quadrato 529, sarà 52900 quello di 230. Indi formeremo il quadrato di 235, con aggiungere alli quadrati di 230, e 5 similmente il duplo del loro prodotto; ed essendo quest'altro quadrato 55225, sarà 5522500 quello di 2350, finalmente formeremo il quadrato di tutto il numero proposto 2354, che si avrà con aggiungere alli quadrati di 2350, e 4 eziandio il duplo del loro prodotto.

225. Ma per ridurre l'esposto artificio a maggior compendio, notisi in questo luogo, che essendo 23 il dato numero, sebbene le sue parti siano 20, e 3 tuttavolta può operarsi in modo, come se fossero 2, e 3. Imperocchè, quantunque i quadrati di esse siano 4, e 9, ed il duplo del loro prodotto sia 12; nientedimeno, se dopo essersi collocato il 4, che è il quadrato di 2, si situi prima il duplo del prodotto 12 talmente, che avanzi quel 4 di un luogo verso destra; ed indi l'altro quadrato 9 fatto da 3 ancora con legge tale, che avanzi quel 12 di un luogo eziandio a destra, secondo vedesi fatto quì sotto, si ritroverà per somma di essi 529, che è il quadrato del dato numero 23.

$$\begin{array}{r} 4\phantom{00} \\ 12\phantom{0} \\ 9 \\ \hline 529 \end{array}$$

226. Per la stessa ragione, essendo 235 il numero proposto, sebbene le sue parti siano 230, e 5, tuttavolta può operarsi in modo, come se fossero 23, e 5. Imperocchè, quantunque i quadrati di esse siano 529, e 25, ed il duplo del loro prodotto sia 230; ad ogni modo, se dopo essersi collocare-

locato il 529, che è il quadrato di 23, si situi prima il duplo del prodotto 230 con legge tale, che avanzi quel 529 di un luogo verso destra, ed indi l'altro quadrato 25 fatto da 5 ancora talmente, che avanzi quel 230 di un luogo eziandio a destra, siccome vedesi fatto quì sotto, si ritroverà per somma di essi 55225, che è il quadrato del dato numero 235.

```
529
 230
  25
-----
55225
```

227. E così finalmente, essendo 2354 il dato numero, sebbene le sue parti siano 2350, e 4, tuttavolta può operarsi in modo, come se fossero 235, e 4. Imperocchè, quantunque i quadrati di essa siano 55225, e 16, ed il duplo del loro prodotto sia 1880; nientedimeno, se dopo essersi collocato il 55225, che è il quadrato di 235, si situi prima il duplo del prodotto 1880 talmente, che avanzi quel 55225 di un luogo verso destra, ed indi l'altro quadrato 16 fatto da 4 ancora con legge tale, che avanzi quel 1880 di un luogo eziandio a destra, secondo vedesi fatto quì sotto, si ritroverà per somma di essi 5541316, che è il quadrato del dato numero 2354.

```
55225
 1880
   16
-------
5541316
```

228. E quindi ora egli è facile di giudicare, così delle parti contenute nel quadrato di un numero composto, come della giusta loro situazione. Sia perciò il numero 2354, il di cui quadrato si è ritrovato essere 5541316. In questo quadrato adunque,

que, incominciando da finistra, si dovranno distinguere primieramente tre parti, cioè il quadrato di 2, il duplo del prodotto di 2 per 3, ed il quadrato di 3. Siccome poi queste tre parti appartengono al quadrato di 23, così in appresso se ne dovranno distinguere due altre, cioè il duplo del prodotto di 23 per 5, ed il quadrato di 5. E finalmente conforme tutte le riferite cinque insieme appartengono al quadrato di 235, così oltre a quelle bisognerà distinguerne altre due, cioè il duplo del prodotto di 235 per 4, ed il quadrato di 4.

229. Per quanto poi alla giusta situazione di dette parti, si determinerà ella facilmente, con segnare nel quadrato totale 5541316 per mezzo de' punti tutti i caratteri, che sono ne' luoghi spari, cioè nel primo, terzo, quinto, e settimo, siccome vedesi fatto quì sotto. Imperocchè, conforme i caratteri segnati si ritroveranno essere tanti, quanti ne sono nel numero 2354, di cui quello è quadrato; così i quadrati parziali di 2, 3, 5, e 4 non oltrepasseranno i caratteri segnati, ed i dupli de' prodotti di 2 per 3, di 23 per 5, e di 235 per 4 non passeranno più oltre degli altri non segnati. Il che si scorge chiaramente da ciò, che con dare a dette parti la riferita situazione, e con sottrarle da quel quadrato, si vede egli affatto svanire.

5541316
. . . .

230. In effetto, se dall'ultimo carattere segnato 5 tolgasi il quadrato di 2, che è 4, rimarrà 1, che col carattere non segnato 5 fa 15; e se da questo 15 tolgasi il duplo del prodotto di 2 per 3, che è 12, rimarrà 3, che col terzo carattere segnato 4 fa 34; e se da questo 34 tolgasi il quadrato di 3, che è 9, rimarrà 25, che col carattere non segnato 1 fa 251; e se da questo 251 tolgasi il duplo del prodotto di 23 per 5, che è 230, rimarrà 21, che col secondo carattere segnato 3 fa 213; e se da que-

questo 213 tolgasi il quadrato di 5, che è 25, rimarrà 188, che col carattere non segnato 1 fa 1881, e se da questo 1881 tolgasi il duplo del prodotto di 235 per 4, che è 1880, rimarrà 1, che col primo carattere segnato 6 fa 16; e finalmente, se da questo 16 tolgasi il quadrato di 4, che similmente è 16, svanirà il proposto quadrato, nè rimarrà altro residuo.

231. L'istesso artificio dovrà tenersi ancora, se fra i caratteri significativi del numero proposto si ritrovi tramezzato qualche zero. Vogliasi perciò il quadrato di 306. Essendo adunque 9 il quadrato di 3, sarà 900 quello di 30. Prendasi di poi così il duplo del prodotto di 30 per 6, che è 360, come il quadrato di 6, che è 36; e situandoli sotto al 900 nella maniera esposta, sarà la loro somma

$$\begin{array}{r} 900\phantom{00} \\ 360\phantom{0} \\ 36 \\ \hline 93636 \end{array}$$

il quadrato di 306. E così ancora volendosi il quadrato di 3204, facciasi primieramente quello di 32; che è 1024; e sarà 102400 il quadrato di 320. Prendasi poscia così il duplo del prodotto di 320 per 4, che è 2560, come il quadrato di 4, che è 16, e situandoli sotto al 102400

$$\begin{array}{r} 102400\phantom{00} \\ 2560\phantom{0} \\ 16 \\ \hline 10265616 \end{array}$$

nella stessa guisa, sarà la loro somma 10265616 il quadrato, che si dimanda.

232. Del rimanente, se il numero dato sia rotto, egli è facile ad intendersi, che si avrà il suo quadrato con formare separatamente i quadrati del numeratore, e denominatore di quel tale rotto. Im-

Imperocchè, per formare il quadrato di $\frac{2}{3}$, di già bisogna moltiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{2}{3}$. Onde, siccome per questa moltiplicazione dee moltiplicarsi 2 per 2, e 3 per 3 (159); così sarà $\frac{4}{9}$ il quadrato di $\frac{2}{3}$. Ma se il rotto fosse unito a qualche intero, in tal caso si formerà prima il quadrato dell'intero, ed indi se gli aggiungerà così il duplo del prodotto dell'intero per lo rotto, come il quadrato dell'istesso rotto. Per ragion di esempio, vogliasi il quadrato di $10\frac{2}{3}$. Si formi primieramente il quadrato di 10, che è 100; e di poi aggiungasi ad esso tanto il duplo del prodotto di 10 per $\frac{2}{3}$, che è $13\frac{1}{3}$, quanto il quadrato di $\frac{2}{3}$, che è $\frac{4}{9}$; e sarà $113\frac{7}{9}$ il quadrato, che si cerca.

233. Per gli numeri poi, che contengono rotti decimali, si formerà il quadrato di ciascuno di essi, con considerarlo come se fosse numero intero, ed in virtù della regola data di sopra (198), si distinguerà nel quadrato formato il vero luogo delle unità, con separare a destra il duplo de' caratteri, che si veggono separati nel numero proposto. Così, il quadrato di 3'5 sarà 12'25, quello di 3'64 sarà 13'2496; e quello di '64 sarà '4096. Ma qui ancora si vuol avere l'avvertenza, che se mai nel quadrato formato non s'incontrino tanti caratteri, quanti bisogna separarne per avere il vero luogo delle unità; in tal caso dovrà supplirsi il carattere mancante col zero, da apporsi immediatamente innanzi al luogo, che si cerca. Onde il quadrato di '3 sarà '09, quello di '25 sarà '0625, e quello di '235 sarà '055225.

## §. II.

### *Dell' Estrazione della radice quadrata.*

234. Spiegata la maniera di formare il quadrato di qualsivoglia numero, passeremo

mo ora a far vedere, come per lo contrario da qualunque numero, che si voglia considerare come quadrato, possa cavarsi la sua radice. Ma per questa operazione bisogna prima avvertire, che non essendo effettivamente quadrati tutti i numeri possibili, non sempre può ritrovarsi con esattezza la radice quadrata di un dato numero. Così tra gli interi, che vanno da 1 persino a 100, abbiamo dieci soli quadrati, i quali siccome sono 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, così anno per loro radici 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; ma tutti gli altri, che fra quelli si tramezzano, di lor natura non sono quadrati, onde si è, che sia impossibile di determinare esattamente le loro radici.

235. Quindi, non essendo quadrato il dato numero, non si potrà in altra guisa determinare la sua radice, se non che per via di approssimazione, cioè con ritrovare quella del quadrato, che più si avvicina al numero dato. E quantunque una tale approssimazione, con impiegare i rotti decimali, possa andare all'infinito; nientedimeno per ora, siccome vogliamo supporre, che il dato numero sia intero, così ci contenteremo di prendere tra gli interi medesimi il quadrato, che più si avvicina al numero proposto. E perciò essendo 36 il quadrato, che più si avvicina a 40, diremo, che sia 6 la radice prossima quadrata di 40; e che vi sia 4 d'avanzo; e similmente essendo 64 il quadrato, che più si avvicina a 70, diremo, che sia 8 la radice prossima quadrata di 70, e che vi sia 6 d'avanzo.

236. Or per intendere l'artificio, che tengono gli Arimmetici in estrarre la radice quadrata, o esatta, o prossima di qualunque numero composto, è necessario prima, che ella si sappia estrarre da ogni numero, che sia espresso, o con uno, o con due caratteri. Ma per queste tali estrazioni non dovremo fare altra cosa, se non che mandare a memoria i primi nove quadrati 1,4,9,16,25,36,49,64,81, che s'incontrano tra gli interi, e notare altresì le loro rispettive radici 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Imperocchè in questa maniera, siccome potremo facil-

cilmente accorgerci, se il numero, di cui si tratta, sia quadrato, o nò; così nel caso, che non lo sia, non duremo fatica in scegliere il quadrato, che più ad esso si avvicina; onde con somma speditezza determineremo eziandio la radice, di cui egli è capace.

237. E' necessario ancora avvertire, che siccome il prodotto di due numeri diviso per uno di essi dee darci in quoziente l'altro numero; così, se mai si avesse il duplo di quel prodotto, in tal caso bisognerebbe dividerlo per lo duplo di uno de' numeri, per avere l'altro in quoziente. In effetto, essendo 12 il prodotto delli due numeri 3, e 4, sarà 4 il quoziente di 12 diviso per 3; ma se mai in luogo di 12 si avesse il suo duplo 24, allora per avere l'istesso quoziente 4, si dovrebbe dividere 24 per 6, che è il duplo di 3. E similmente, essendo 36 il prodotto delli due numeri 4, e 9, sarà 9 il quoziente di 36 diviso per 4; ma se mai in vece di 36 si avesse il suo duplo 72, in questo caso, per avere l'istesso quoziente 9, bisognerebbe dividere 72 per 8, che è il duplo di 4.

238. Avvertite tali cose, veniamo ora all'artificio, che dee tenersi per estrarre la radice quadrata, sia esatta, sia prossima da qualunque numero composto. Ed in primo luogo avanti d'incominciare l'estrazione della radice, che si dimanda, egli è necessario segnare con punti tutti i caratteri, che si ritrovano situati ne' luoghi spari del numero proposto. E bisogna ciò fare per due ragioni. La prima si è, perchè così conosceremo di quanti caratteri debba costare la radice cercata; per dover' essere tanti per l'appunto, quanti se ne vedranno segnati nel dato numero. E l'altra si è, perchè colla scorta de' caratteri, che si veggono segnati nel numero proposto, ci riescirà facile di ritrovare ad uno ad uno quei della radice medesima.

239. Per andare intanto con ordine, suppongasi primieramente, che il numero proposto sia tale, che debbansi in esso segnare due soli caratteri; siccome

come è il seguente, 2916, in cui il primo carattere da segnarsi sarà 6, ed il secondo 9. La sua

2916
. .

radice quadrata adunque dovrà costare parimente di due caratteri, i quali potranno considerarsi come sue parti. E per quelranto è stato dimostrato di sopra, siccome nel dato numero dovranno contenersi i quadrati di dette parti, ed il duplo del loro prodotto; così il quadrato della prima parte si estenderà persino al 9, il duplo del riferito prodotto passerà più oltre persino all' 1, ed il quadrato dell' altra parte giungerà persino al 6.

240. Quindi, conforme per avere la prima parte di detta radice, non dovrà farsi altra cosa, se non che prendere la radice quadrata prossima di 29, la quale è 5; così, se tolto da 29 il quadrato di 5, che è 25, appongasi al residuo 4 l'1,

| 2916 | 54 |
|---|---|
| . . | |
| 41 | 10 |
| 16 | |

che viene in appresso, si avrà l'altra parte, con dividere 41 per 10, che è il duplo di 5, e con notare il quoziente di questa divisione, il quale è 4. Ma dopo essersi ritrovato questo quoziente, bisogna poi fare due sottrazioni, cioè prima da 41 dovrà togliersi 40, che è il duplo del prodotto di 5 per 4; ed indi apposto al residuo 1 il rimanente carattere 6, si dovrà ancora togliere da 16 il quadrato di 4, che similmente è 16.

241. Intanto per maggior compendio queste due sottrazioni sogliono ridursi ad una sola in questa maniera. Già, dopo essersi ritrovata la prima parte della radice 5, dee prendersi il suo duplo 10, affinchè dividendo 41 per 10 possa aversi l'altra parte 4. Si scriverà adunque il 4 così presso

 al

al 5, come presso al 19, per potersi avere non meno 54, che 104; si apporrà poi al 41 il rima-

| | |
|---|---|
| 2916 | 54 |
| 416 | 104 |

nente carattere 6, e si toglierà da 416 tuttocciò, che si produce moltiplicando 104 per 4. E la ragione è chiara, poichè in questo solo prodotto si ritrovano racchiusi secondo le giuste loro situazioni, ed il quadrato di 4, ed il duplo del prodotto di 5 per 4.

242. Or due sono le ragioni, che ci obbligano a fare tali sottrazioni. La prima si è per vedere, se nel numero proposto vi sia qualche avanzo, ed in conseguenza per assicurarci, se la radice ritrovata sia esatta, o prossima. Così nell'esempio di sopra, togliendo da 416 il prodotto di 104 per 4, non rimane avanzo veruno; onde dobbiam conchiudere, che 54 sia radice quadrata esatta di 2916. Ma se mai si voglia cavare la radice quadrata da 4499, avvalendoci dello stesso artificio, ritroveremo, che ella sia 67, ma avremo ancora 10 d'avanzo, secondo vedesi quì sotto.

| | |
|---|---|
| 4499 | 67 |
| 899 | 127 |
| 10 | |

243. L'altra ragione si è, perchè siccome l'altra parte della radice, che si ritrova per mezzo della divisione, dee talvolta minorarsi; così si conoscerà il minoramento da farsi per l'impossibilità, che s'incontra in fare le riferite sottrazioni. Così, volendosi cavare la radice quadrata dal numero 2189, sarà 4 la radice quadrata prossima di 21, e dividendo 58 per 8, sarà 7 il quoziente di questa divisione; ma non potendosi da 589 togliere il prodottto di 87 per 7, dovrà

dovrà minorarsi quel quoziente. Sicchè in vece di 7 prenderemo 6 per quoziente; e poichè da 589 può togliersi il prodotto di 86 per 6, diremo,

2189 . 46

589 . 86

73

che sia 46 la radice quadrata prossima di 2189, e che vi sia 73 d'avanzo.

244. Si vuole ancora quì avvertire, che l'altra parte della radice, che si cerca, può esser talvolta il zero; e ciò avviene, quantevolte non può farsi la divisione, per mezzo di cui ella si ritrova. Debbasi, a cagion di esempio, estrarre la radice quadrata dal numero 3705; ed essendo 6 la radice quadrata prossima di 37, sarà 6 ancora la

3705 60

105 120

prima parte della radice, che si dimanda. Or tolto da 37 il quadrato di 6, che è 36, ed apposto al residuo 1 il seguente carattere 0, non può dividersi 10 per lo duplo di 6, che è 12. Onde l'altra parte della stessa radice sarà 0; e poichè togliendo da 105 il prodotto di 120 per 0, rimane l'istesso 105, diremo, che sia 60 la radice prossima quadrata di 3705, e che vi sia 105 d'avanzo.

245. Sempre quando si sà estrarre la radice quadrata da un numero, in cui sono due i caratteri da segnarsi, potrà ella estrarsi ancora da ogni altro numero, in cui si debbano segnare tre caratteri. Sia perciò il numero 116964, e segnati i tre caratteri situati ne' luoghi spari, ritrovasi la radice quadrata di tutto ciò, che si estende persi-

116964 342

1364 682

no al secondo carattere segnato, cioè di 1169, la quale sarà 34, e darà 13 d'avanzo. Quindi, con-

 side-

ſiderando 34 come una delle due parti della radice, che ſi cerca, ſi ritroverà l'altra parte, con apporre al 13 il carattere, che ſegue 6, e con dividere 136 per 68 duplo di 34. E poicchè il quoziente di queſta diviſione è 2, e da 1364 può togliersi il prodotto di 682 per 2, ſenza che ſi abbia avanzo veruno; sarà il medeſimo 2 l'altra parte, e tutto il numero 342 ſarà radice quadrata eſatta del numero propoſto.

246. Sia ancora il numero 295949, e debbaſi da quello cavare la radice quadrata, o eſatta, o proſſima. Si ſegnino i tre caratteri ſituati ne' luoghi ſpari, e ritroviſi la radice quadrata di quel tanto ſi eſtende perſino al ſecondo carattere ſegnato, cioè di 2959, la quale ſarà 54, e darà d'avan-

| 295949 | 543 |
|---|---|
| 4349 | 1083 |
| 1100 | |

zo 43. Appongaſi a queſto avanzo il ſeguente carattere 4, e dividaſi 434 per 108 duplo di 54, che darà 4 in quoziente. Ma poichè da 4349 non può togliersi il prodotto di 1084 per 4, ſi dovrà minorare quel quoziente; onde in luogo di 4 ſcriveremo 3, e togliendo da 4349 il prodotto di 1083 per 3; ritroveremo, che non ſolo può farſi la ſottrazione, ma che vi ſia ancora d'avanzo 1100; con che diremo, che ſia 543 la radice quadrata proſſima del numero propoſto, e che vi ſia di reſto 1100.

247. Per la ſteſſa ragione ſapendoſi eſtrarre la radice quadrata da un numero, in cui ſono tre i caratteri da ſegnarſi, ſi potrà la medeſima eſtrarre altresì da ogn'altro numero, in cui ſi debbano ſegnare quattro caratteri. Sia perciò il numero 11730625, e ſegnati i quattro caratteri ſituati ne' luoghi ſpari, ritroviſi la radice quadrata di tutto ciò, che ſi eſtende perſino al ſecondo carattere ſegnato, cioè di 117306, la quale ſarà 342, e darà ancora 342 d'avanzo. Quindi conſiderandola come

come una delle due parti della radice, che si dimanda, si ritroverà l'altra parte con apporre a

| 11730625 | 3425 |
| --- | --- |
| . . . . | |
| 34225 | 6845 |

quell'avanzo il carattere, che segue 2, e con dividere 3422 per 684 duplo di 342. E poichè il quoziente di questa divisione è 5, e da 34225 può togliersi il prodotto di 6845 per 5, senzacchè si abbia avanzo veruno; sarà 5 l'altra parte, e tutto il numero 3425 sarà radice quadrata del numero proposto.

248. Sia inoltre il numero 29550225, e debbasi da quello cavare la radice quadrata, di cui egli è capace. Si segnino i quattro caratteri situati ne' luoghi spari, e ritrovisi la radice quadrata di queltanto si estende persino al secondo carattere

| 29550225 | 5435 |
| --- | --- |
| . . . . | |
| 65325 | 10865 |
| 11000 | |

segnato, cioè di 295502, la quale sarà 543, e darà 653 d'avanzo. Appongasi a questo avanzo il seguente carattere 2, e dividasi 6532 per 1086 duplo di 543, che darà 6 in quoziente. Ma poichè da 65325 non può togliersi il prodotto di 10866 per 6, si dovrà minorare quel quoziente; onde in vece di 6 scriveremo 5, e togliendo da 65325 il prodotto di 10865 per 5, ritroveremo, che non solo può farsi la sottrazione; ma che vi sia ancora d'avanzo 11000; con che diremo, che sia 5435 la radice prossima quadrata del numero proposto, e che vi sia di resto 11000.

249. Adunque andando con ordine, potrà estrarsi la radice quadrata da ogn'altro numero composto, con far'uso sempre del medesimo artificio, il quale dipende da quel teorema generale, che consi-

derando la radice come composta di due parti, si debbano contenere nel dato numero i quadrati di dette parti, ed il duplo del loro prodotto. Ma, qualunque sia il numero proposto, bisogna sempre avvertire, che siccome l'altra parte della radice ritrovasi con dividere il duplo del riferito prodotto per lo duplo della prima parte già ritrovata; così se mai questa divisione non possa farsi; o per incontrarsi il dividendo minore del divisore, o pure per non esser capace il quoziente di minoramento tale, che possa aver luogo la sottrazione necessaria, in tal caso dovrà scriversi zero come altra parte della radice, che si cerca.

250. Vogliasi per ragion di esempio la radice quadrata del numero 116037; in cui debbono segnarsi tre caratteri. Essendo adunque 34 la radice prossima quadrata di 1160, sarà l'istesso 34 una

| 116037 | 340 |
|---|---|
| . . . | |
| 437 | 680 |

delle due parti della radice, che si dimanda; ed essendovi 4 d'avanzo, dovrà dividersi 43 per 68 duplo di 34 per avere l'altra parte. Onde non potendosi fare tal divisione, sarà o l'altra parte; con che la radice richiesta sarà 340, e l'avanzo sarà 437. Vogliasi similmente la radice quadrata del numero 11699684, in cui si debbono segnare quattro caratteri. Essendo adunque 342 la radice prossima quadrata di 116996, sarà l'istesso 332 una

| 11699684 | 3420 |
|---|---|
| . . . . | |
| 3284 | 6840 |

delle due parti della radice, che si cerca; ed essendo 32 l'avanzo, dovrà ritrovarsi l'altra parte con dividere 328 per 684 duplo di 342. Onde, perchè non può farsi questa divisione, sarà o l'altra

tra parte; e pertanto la richiesta radice sarà 3420, e l'avanzo sarà 3284.

251. Del rimanente, se la radice quadrata voglia estrarsi da qualche rotto, non dovrà farsi altra cosa, se non che cavarla, così dal suo numeratore, come dal suo denominatore; ed in caso, che questo secondo non sia quadrato perfetto, bisognerà renderlo tale con moltiplicare l'uno, e l'altro per un qualche numero, che sia valevole a farlo. Così la radice quadrata di $\frac{4}{9}$ sarà $\frac{2}{3}$, quella di $\frac{16}{25}$ sarà $\frac{4}{5}$, e quella di $\frac{49}{100}$ sarà $\frac{7}{10}$. Ma volendosi estrarre la radice quadrata da $\frac{5}{18}$, si dovrà prima rendere quadrato il suo denominatore; il che potrà farsi con moltiplicare per 2 tanto il 5, quanto il 18, poichè trasformandosi il dato rotto in $\frac{10}{36}$, sarà $\frac{3}{6}$, o pure $\frac{1}{2}$ la sua prossima radice quadrata, e vi sarà $\frac{1}{36}$ d'avanzo.

252. Che se poi debba estrarsi la radice quadrata da un numero, che sia composto d'intero, e rotto; in tal caso si ridurrà l'intero eziandio a rotto, ed indi si caverà la radice, come se il dato numero fosse tutto rotto. E quì ancora bisogna avvertire, che non essendo quadrato il denominatore del rotto, dee rendersi tale nella maniera esposta di sopra. Così, essendo $6\frac{1}{4}$ il numero dato, si ridurrà il 6 a $\frac{24}{4}$; onde, essendo $6\frac{1}{4}$ l'istesso, che $\frac{25}{4}$, sarà $\frac{5}{2}$, o pure $2\frac{1}{2}$ la sua radice quadrata. E così ancora, essendo $7\frac{2}{3}$ il numero proposto, si ridurrà il 7 a $\frac{21}{3}$; e pertanto essendo $7\frac{2}{3}$ l'istesso, che $\frac{23}{3}$, ovvero $\frac{69}{9}$, sarà $\frac{8}{3}$, o pure $2\frac{2}{3}$ la sua prossima radice quadrata, e vi sarà $\frac{5}{9}$ d'anvanzo.

253. Se il numero proposto contiene rotto decimale, si caverà da esso la radice quadrata, considerandolo come intero; e si distinguerà nella radice

dice cavata il vero luogo delle unità, con separare a destra tanti caratteri, quanti ne addita la metà di coloro, che si veggono separati nel numero medesimo: onde se mai in questo i caratteri separati siano spari di numero, in tal caso bisognerà renderli pari, con aggiungere ad essi un zero a destra, colla quale aggiunta diverrà ancora quadrato il denominatore del rotto decimale. Così la radice quadrata di 5'25 sarà 2'5, e quella di 5'5225 sarà 2'35. Ma se mai il numero dato sia 6'867, si prenderà in vece di esso 6'8670, e si ritroverà, che la sua prossima radice quadrata sia 2'62, e che vi sia d'avanzo '0026.

254. Finalmente essendosi accennato di sopra, che non potendosi da un numero intero cavare esattamente la radice quadrata, possiamo per mezzo de' rotti decimali sempre più ad essa avvicinarci, vediamo ora, in che modo debba ciò farsi. Vogliasi perciò cavare la radice quadrata da 5, che non è quadrato perfetto; ed essendo 5 l'istesso, che 5'00, si potrà in vece di 5 sostituire 5'00, la di cui radice quadrata prossima si ritroverà essere 2'2. Ma in luogo di 5 si potrebbe ancora surrogare 5'0000, o pure 5'000000; ed in questo caso la prossima radice quadrata sarebbe 2'23, ovvero 2'236. Ed egli è chiaro, che quante più coppie de' zeri si apporranno al 5, tanto maggiormente ci accosteremo alla sua vera radice quadrata.

255. Intanto questo artificio può pratticarsi ancora ne' medesimi numeri, che contengono rotti decimali. Così dovendosi cavare la radice quadrata da 3'36, e non essendo questo numero quadrato perfetto, potrà sostituirsi in suo luogo o 3'3600, o pure 3'360000, e si ritroverà, che la sua prossima radice quadrata sia o 1'83, ovvero 1'833. Anzi ne' rotti ordinarj eziandio può essere impiegato l'istesso artificio. Imperocchè, supposto a cagion di esempio, che sia $\frac{5}{4}$ il rotto, da cui dee cavarsi la radice quadrata, si ritroverà essere 2'236 la radice prossima del numeratore 5, e 2 la radice esatta del de-

denominatore 4; onde dividendo la prima 2'236 per la seconda 2, sarà il quoziente di questa divisione 1'118 la radice quadrata prossima del rotto proposto.

## §. III.

### *Della Composizione del cubo.*

256. IL cubo di un numero qualsivoglia, come terza sua potenza, formasi propriamente, con moltiplicare il numero proposto due volte per se medesimo. Così il cubo di 3 dee essere 27; poichè siccome moltiplicando 3 per 3, si produce 9, così moltiplicando questo 9 un'altra volta per 3, si produce 27. E per la stessa ragione il cubo di 4 sarà 64, quello di 5 sarà 125, e così in appresso. Ma per evitare la noja di questa doppia moltiplicazione, qualora il numero è composto, e per intendere altresì l'artificio, che suol pratticarsi per estrarre la radice da un numero, che si vuol considerare come cubo; giova esaminare, quali siano le parti contenute nel cubo di qualunque numero composto, e quale similmente sia la giusta loro situazione.

257. Ed in primo luogo, egli è da notarsi, che avendosi il cubo di un numero, con moltiplicare quel numero due volte per se stesso, possiamo dire ancora, che egli si produca, moltiplicando il quadrato del numero per lo numero medesimo. Così, essendo 9 il quadrato di 3, ed essendo 27 il prodotto di 9 per 3, sarà 27 il cubo di 3. Similmente, essendo 16 il quadro di 4, ed essendo 64 il prodotto di 16 per 4, sarà 64 il cubo di 4. E così ancora, perchè il quadrato di 5 è 25, ed il prodotto di 25 per 5 è 125, sarà 125 il cubo di 5. Or con questo avvertimento egli è facile il dimostrare, che il cubo di un numero composto di due parti debba essere eguale alli cubi di dette parti, ed al triplo di due prodotti, de' quali uno sia fatto dal quadrato della prima parte per la seconda, e l'al-

l'altro per lo contrario dal quadrato della seconda parte per la prima.

258. Imperocchè, formandosi il cubo di detto numero colla moltiplicazione del suo quadrato per l'istesso numero, dovrà egli essere eguale (213) alli prodotti, che si avranno, moltiplicando ciascuna parte del quadrato per ciascuna parte del numero. Ma le parti del quadrato sono (214) i quadrati delle due parti del numero, ed il duplo del prodotto delle medesime parti; e colla moltiplicazione di esse per ciascuna parte del numero vengono ad aversi i cubi delle due parti del numero, il triplo del prodotto del quadrato della prima parte per la seconda, ed il triplo del prodotto del quadrato della seconda parte per la prima. Adunque il cubo di un numero composto di due parti sarà eguale alli cubi di dette parti, ed al triplo di due prodotti, de' quali uno sarà fatto dal quadrato della prima parte per la seconda, e l' altro al contrario dal quadrato della seconda parte per la prima.

259. Questo tale teorema è quello, del quale dee farsi uso per l'argomento, di cui si tratta; ed in virtù di esso si avrà il cubo di un numero composto di due parti, con prendere i cubi delle due parti, e con aggiungere alla loro somma tanto il triplo del prodotto del quadrato della prima parte per la seconda, quanto il triplo del prodotto del quadrato della seconda parte per la prima. Così, supposto, che le parti di 8 siano 3, e 5, io prendo primieramente i cubi di 3, e 5; che sono 27, e 125; indi aggiungo ad essi così tre volte il prodotto del quadrato di 3 per 5, che è 45, come tre volte il prodotto del quadrato di 5 per 3, che è 75, o pure i tripli di questi prodotti, che sono 135, e 225; e siccome 27, 125, 135, 225 insieme fanno 512, così sarà 512 il cubo di 8. Similmente supposto, che le parti di 10 siano 4, e 6, io prendo primieramente i loro cubi, che sono 64, e 216; indi il triplo del prodotto del quadrato di 4 per 6, che è 288; ed in fine il triplo del prodotto del quadrato di 6 per 4, che è 432;

e la

e la somma 1000 di questi quattro numeri sarà il cubo del numero 10.

260. Prima di passare innanzi, non sarà egli inutile di fare quì un' avvertimento, e si è, che essendo sempre 1, così il quadrato, come il cubo dell' unità, e producendosi colla moltiplicazione di un numero per l' unità quel medesimo numero, possiamo dal riferito teorema dedurre il seguente corollario, cioè che se al cubo di un numero intero qualsivoglia aggiungasi primieramente il triplo del suo quadrato, indi il triplo dell' istesso numero, e finalmente l' unità, si avrà il cubo del numero intero, che segue. Così al cubo di 3, che è 27, aggiungendo il triplo del suo quadrato, che similmente è 27, il triplo dell' istesso 3, che è 9, e di più l' unità, si avrà 64, che è il cubo di 4, consecutivo al 3. Similmente al cubo di 5, che è 125, aggiungendo il triplo del suo quadrato, che è 75, il triplo dell' istesso 5, che è 15, e di più l' unità, si avrà 216, che è il cubo di 6, consecutivo al 5.

261. Quindi niente sarà più facile, quanto di formare una tavola, in cui siano racchiusi i cubi de' numeri interi persino a quello di 1000, o pure più innanzi, per averli pronti nel bisogno. Imperocchè, tralasciando i cubi de' primi dieci numeri, come facili a farsi, ed incominciando da quello di 10, che è 1000, se ad esso aggiungeremo il triplo del quadrato di 10, che è 30, il triplo dell' istesso 10, che è 30, e di più l' unità, avremo 1331, che è il cubo di 11; e se a 1331 aggiungeremo poscia il triplo del quadrato di 11, che è 363, il triplo dell' istesso 11, che è 33, e di più l' unità, avremo 1728, che è il cubo di 12; ed ancora se a 1728 aggiungeremo in appresso il triplo del quadrato di 12, che è 432, il triplo dell' istesso 12, che è 36, e di più l' unità, avremo 2197, che è il cubo di 13. Onde andando avanti sempre collo stesso artificio, formeremo l' intera tavola, che si dimanda.

262. Per ritornare ora al nostro proposito, uopo è

po è spiegare più minutamente, come per mezzo del riferito teorema possa formarsi il cubo di qualunque numero composto. Ed in primo luogo egli è da sapersi, che siccome i cubi de' numeri semplici debbono formarsi colla moltiplicazione effettiva; così, se il numero composto sia espresso con un solo carattere significativo, e con uno, o più zeri, che lo precedano, si avrà il suo cubo con fare quello del carattere significativo, e con apporgli il triplo de' zeri, che sono nel numero, di cui si tratta (86). Essendo adunque 8 il cubo di 2, sarà 8000 il cubo di 20, 8000000 il cubo di 200, 8000000000 il cubo di 2000, e così in in appresso. E similmente essendo 27 il cubo di 3, sarà 27000 il cubo di 30, 27000000 il cubo di 300, 27000000000 il cubo di 3000, e così all'infinito.

263. Quindi i caratteri, che debbono esprimere il cubo di un numero composto, non mai possono essere tanti, che oltrepassino il triplo di quelli, che esprimono il numero medesimo. Imperocchè, essendo 1000 il cubo di 10, per necessità il cubo di ogn'altro numero disegnato con un sol carattere dovrà essere minore di 1000, e perciò non mai potrà essere espresso con quattro caratteri. Similmente, essendo 1000000 il cubo di 100, forzosamente il cubo di ogn'altro numero disegnato con due caratteri dovrà essere minore di 1000000, e pertanto non mai potrà essere espresso con sette caratteri. E così ancora, essendo 1000000000 il cubo di 1000, egli è fuor di ogni dubbio, che il cubo di ogn'altro numero disegnato con tre caratteri debba essere minore di 1000000000, ed in conseguenza non mai potrà essere espresso con dieci caratteri.

264. Egli è ancora da sapersi, che quel compendio, il quale si prattica in fare il cubo di un numero espresso con un sol carattere significativo, e con uno, o più zeri che lo precedono, ha luogo parimente, quando sono due, o più i caratteri significativi del numero proposto; poichè con formare il cubo del numero espresso colli soli

li caratteri significativi, e con apporgli il triplo de' zeri, che sono nel dato numero, si avrà il cubo, che si dimanda. Così, essendo 12167 il cubo di 23, sarà 12167000 quello di 230, e 12167000000 quello di 2300; ed ancora, essendo 12977875 il cubo di 235, sarà 12977875000 quello di 2350, e 12977875000000 quello di 23500. Onde tutta la difficoltà consiste in fare i cubi de' numeri, che sono espressi con due, o più caratteri significativi.

265. E primieramente, essendovi un numero espresso con due caratteri significativi, e volendosi il suo cubo, non dovrà farsi altra cosa, se non che considerare come parti di quel numero i valori locali de' suoi caratteri, ed indi alli cubi di dette parti aggiungere così il triplo del prodotto del quadrato della prima per la seconda, come il triplo del prodotto del quadrato della seconda per la prima. Così, essendo 35 il numero proposto, saranno 30, e 5 le sue parti; e poichè i cubi di queste parti sono 27000, e 125, il triplo del prodotto del quadrato della prima per la seconda è 13500, ed il triplo del prodotto del quadrato della seconda per la prima è 2250, aggiungansi insieme questi numeri 27000, 13500, 2250, 125, e la loro somma 42875 sarà il cubo di 35. Similmente, essendo 47 il dato numero, saranno 40, e 7 le sue parti; alli di cui cubi 64000, e 343, aggiungendo così il triplo del prodotto del quadrato della prima per la seconda, che è 33600, come il triplo del prodotto del quadrato della seconda per la prima, che è 5880, si avrà per somma 103823, che sarà il cubo di 47.

266. Che se poi il numero sia espresso con tre caratteri significativi, si dovrà egli considerare similmente come composto di due parti, delle quali una sarà il valore del primo carattere, e l' altra il valore locale degli altri due; e si avrà il cubo di detto numero con aggiungere parimente alli cubi delle sue parti, tanto il triplo del prodotto del quadrato della prima per la seconda, quanto il triplo del prodotto del quadrato della se-

con-

conda per la prima. Così, essendo 235 il numero proposto, le sue parti saranno 230, e 5; onde perchè i cubi di queste parti sono 12167000, e 125, il triplo del prodotto del quadrato della prima per la seconda è 793500, ed il triplo del prodotto del quadrato della seconda per la prima è 17250; sarà la somma di tutti questi numeri, cioè 12977875 il cubo di 235. E facendo uso del medesimo artificio, si ritroverà essere 44361864 il cubo di 354.

267. Or dell'istessa maniera, essendo il numero espresso con quattro caratteri significativi, dovrà egli considerarsi come composto di due parti, delle quali una sarà il valore del primo carattere, e l'altra il valore locale degli altri tre; e si avrà il suo cubo eziandio con aggiungere alli cubi di dette parti non meno il triplo del prodotto del quadrato della prima per la seconda, che il triplo del prodotto del quadrato della seconda per la prima. Nè altrimenti dovrà farsi, se più di quattro siano i caratteri significativi del numero proposto; poichè siccome potrà riguardarsi come una delle sue parti il valore del primo carattere, e come altra parte il valore locale degli altri, che seguono, così con fare i cubi di dette parti, e con aggiungerli tanto il triplo del prodotto del quadrato della prima per la seconda, quanto il triplo del prodotto del quadrato della seconda per la prima, si avrà il cubo, che si dimanda.

268. Intanto con questo metodo non potrà farsi il cubo di un numero espresso con molti caratteri significativi, se prima non si sappiano formare i cubi di coloro, che sono espressi con più pochi caratteri. In effetto, volendosi il cubo di 2354, formeremo prima quello di 23, con aggiungere alli cubi di 20, e 3 così il triplo del prodotto del quadrato di 20 per 3, come il triplo del prodotto del quadrato di 3 per 20; ed essendo questo cubo 12167, sarà 12167000 quello di 230. Indi, formeremo il cubo di 235, con aggiungere alli cubi di 230, e 5 similmente tanto il triplo del prodotto del quadrato di 230 per 5, quanto il triplo del prodotto del quadrato di 230 per 5, quanto il triplo del pro-
dot-

dotto del quadrato di 5 per 230, ed essendo quest' altro cubo 12977875, sarà 12977875000 quello di 2350. Finalmente formeremo il cubo di tutto il numero proposto, che si avrà, con aggiungere alli cubi di 2350, e 4 eziandio, ed il triplo del prodotto del quadrato di 2350 per 4, ed il triplo del prodotto del quadrato di 4 per 2350.

269. Ma per ridurre l'esposto artificio a maggior compendio, notisi in questo luogo, che essendo 23 il dato numero, sebbene le sue parti siano 20, e 3, tuttavolta può operarsi in modo, come se fossero 2, e 3. Imperocchè, quantunque i cubi di esse siano 8, e 27, il triplo del prodotto del quadrato della prima per la seconda sia 36, ed il triplo del prodotto del quadrato della seconda per la prima sia 54; nientedimeno, se dopo essersi collocato l'8, che è il cubo di 2, si situi primieramente il triplo del primo prodotto 36, con legge tale, che avanzi quell' 8 di un luogo verso destra, indi il triplo del secondo prodotto ancora in maniera tale, che avanzi più oltre verso destra di un'altro luogo, e finalmente l' altro cubo fatto da 3, cioè 27 eziandio colla medesima legge, secondo vedesi fatto qui sotto, si ritroverà per somma di essi 12167, che è il cubo del dato numero 23.

```
8
 36
  54
   27
-----
12167
```

270. Per la stessa ragione, essendo 235 il numero proposto, sebbene le sue parti siano 230, e 5, tuttavolta può operarsi in modo, come se fossero 23, e 5. Imperocchè, quantunque i cubi di esse siano 12167, e 125, il triplo del prodotto del quadrato di 23 per 5 sia 7935, ed il triplo del prodotto del quadrato di 5 per 23 sia 1725; ad ogni mo-

modo, se i quattro numeri 12167, 7935, 1725, 125, cioè il cubo di 23, il triplo del primo prodotto, il triplo del secondo prodotto, ed il cubo di 5 si scrivano talmente l'uno sotto l'altro, che si vadano avanzando sempre di un luogo verso destra, siccome vedesi fatto quì sotto, si ritroverà per somma di essi 12977875, che è il cubo del dato numero 235.

```
12167
 7935
  1725
    125
--------
12977875
```

271. E così finalmente, essendo 2354 il dato numero, sebbene le sue parti siano 2350, e 4, tuttavolta può operarsi in modo, come se fossero 235, e 4. Imperocchè, quantunque i cubi di esse siano 12977875, e 64, il triplo del prodotto del quadrato di 235 per 4 sia 662700, ed il triplo del prodotto del quadrato di 4 per 235 sia 11280; tuttavolta, se i quattro numeri 12977875, 662700, 11280, e 64, cioè il cubo di 235, il triplo del primo prodotto, il triplo del secondo prodotto, ed il cubo di 4 si situino con legge tale l'uno sotto l'altro, che si vadano avanzando sempre di un luogo verso destra, secondo vedesi fatto quì sotto, si ritroverà per somma di essi 13044257864, che è il cubo del numero proposto 2354.

```
12977875
  662700
    11280
        64
-----------
13044257864
```

272. E quindi ora egli è facile di giudicare così delle parti contenute nel cubo di un numero compo-

posto, come della giusta loro situazione. Sia per ciò il numero 2354, il di cui cubo si è ritrovato essere 13044257864. In questo cubo adunque, incominciando da sinistra, si dovranno distinguere primieramente quattro parti, cioè il cubo di 2, il triplo del prodotto del quadrato di 2 per 3, il triplo del prodotto del quadrato di 3 per 2, ed il cubo di 3. Siccome poi queste quattro parti appartengono al cubo di 23, così in appresso se ne dovranno distinguere tre altre, cioè il triplo del prodotto del quadrato di 23 per 5, il triplo del prodotto del quadrato di 5 per 23, ed il cubo di 5. E finalmente, conforme tutte le riferite sette parti appartengono al cubo di 235, così oltre a quelle bisognerà distinguerne altre tre, cioè il triplo del prodotto del quadrato di 235 per 4, il triplo del prodotto del quadrato di 4 per 235, ed il cubo di 4.

273. Per quanto poi alla giusta situazione di dette parti, si determinerà ella facilmente, se nel cubo totale 13044257864, dopo essersi segnato con un punto il primo carattere, se ne segnino altri in appresso con legge tale, che tra' due prossimi segnati ne restino sempre due non segnati. Imperocchè, conforme i caratteri segnati si ritroveranno essere tanti, quanti ne sono nel numero 2354, di cui quello è cubo; così i cubi parziali di 2, 3, 5, e 4 non oltrepasseranno i caratteri segnati, i tripli de' prodotti fatti dal quadrato di 2 per 3, dal quadrato di 23 per 5, e dal quadrato di 235 per 4 non passeranno più oltre de' primi non segnati, che immediatamente s' incontrano andando verso destra, ed i tripli de' prodotti fatti dal quadrato di 3 per 2, dal quadrato di 5 per 23, e dal quadrato di 4 per 235 non si estenderanno più innanzi degli altri non segnati, che rimangono. Il che si scorge chiaramente da ciò, che con dare a dette parti la riferita situazione, e con toglierle da quel cubo, si vede egli affatto svanire.

13044257864

274. In effetto, se dal 13, che si ritrova persino all'ultimo carattere segnato, tolgasi il cubo di 2, che è 8, rimarrà 5, che col carattere non segnato 0 fa 50; e se da questo 50 tolgasi 36, che è il triplo del prodotto del quadrato di 2 per 3, rimarrà 14, che coll'altro carattere non segnato 4 fa 144; e se da questo 144 tolgasi 54, che è il triplo del prodotto del quadrato di 3 per 2, rimarrà 90, che col terzo carattere segnato 4 fa 904; e se da questo 904 tolgasi 27, che è il cubo di 3, rimarrà 877, che col carattere non segnato 2 fa 8772; e se da questa 8772 tolgasi 7935, che è il triplo del prodotto del quadrato di 23 per 5, rimarrà 837, che insieme coll'altro carattere non segnato 5 fa 8375; e se da questo 8375 tolgasi 1725, che è il triplo del prodotto del quadrato di 5 per 23, rimarrà 6650, che col secondo carattere segnato 7 fa 66507; e se da questo 66507 tolgasi il cubo di 5, che è 125, rimarrà 66382, che insieme col carattere non segnato 8 fa 663828; e se da questo 663828 tolgasi 662700, che è il triplo del prodotto del quadrato di 235 per 4, rimarrà 1128, che insieme coll'altro carattere non segnato 6 fa 11286; e se da questo 11286 tolgasi 11280, che è il triplo del prodotto del quadrato di 4 per 235, rimarrà 6, che insieme col primo carattere segnato 4 fa 64; e finalmente se da questo 64 tolgasi il cubo di 4, che similmente è 64, svanirà il proposto cubo, nè rimarrà altro residuo.

275. L'istesso artificio dovrà tenersi ancora, se fra i caratteri significativi del numero proposto si ritrovi tramezzato qualche zero. Vogliasi perciò

```
27000
16200
 3240
  216
--------
28652616
```

il cubo di 306. Essendo adunque 27 il cubo di 3; sarà

farà 27000 quello di 30. Prendansi di poi, ed il triplo del prodotto del quadrato di 30 per 6, ed il triplo del prodotto del quadrato di 6 per 30, ed il cubo di 6, i quali sono 16200, 3240, e 216; e situandoli sotto al 27000 nella maniera esposta, farà la loro somma 28652616 il cubo di 306. E così ancora, volendosi il cubo di 3204, facciasi primieramente quello di 32, che è 32768, e sarà 32768000 il cubo di 320. Prendansi poscia ed il triplo del prodotto del quadrato di 320 per 4, ed il triplo del prodotto del quadrato di 4 per 320, ed il cubo di 4, i quali sono 1228800, 15360, e 64; e situandoli sotto al 32768000 nella stessa guisa,

```
32768000
 1228800
   15360
      64
--------
32891033664
```

farà la loro somma 32891033664 il cubo, che si dimanda.

276. Del rimanente, se il numero dato sia rotto, egli è facile ad intendersi, che si avrà il suo cubo con formare separatamente i cubi del numeratore, e denominatore del dato rotto. Imperocchè, per formare il cubo di $\frac{2}{3}$, prima bisogna fare il suo quadrato, che è $\frac{4}{9}$, ed indi moltiplicare $\frac{4}{9}$ per $\frac{2}{3}$, (258). Onde, siccome per questa moltiplicazione dee moltiplicarsi 4 per 2, e 9 per 3 (159), così sarà $\frac{8}{27}$ il cubo di $\frac{2}{3}$: Ma se il rotto fosse unito a qualche intero, in tal caso si formerà prima il cubo dell'intero, a cui poscia si aggiungerà ed il triplo del prodotto del quadrato dell'istesso intero per lo rotto, ed il triplo del prodotto del quadrato del rotto per l'intero, ed il cubo del rotto. Per ragion di esempio, vogliasi il cubo di $10\frac{2}{3}$, si formi primieramente il cubo

 di 10

di 10, che è 1000; ed indi se gli aggiunga, ed il triplo del prodotto del quadrato di 10 per $\frac{1}{3}$, che è 200, ed il triplo del prodotto del quadrato di $\frac{1}{3}$ per 10, che è $13\frac{1}{3}$, ed il cubo di $\frac{1}{3}$, che è $\frac{1}{27}$; e la somma $1213\frac{17}{27}$ sarà il cubo di $10\frac{1}{3}$.

277. Per gli numeri poi, che contengono rotti decimali, si formerà il cubo di ciascuno di essi, con considerarlo come se fosse intero, ed in virtù della regola data di sopra (198) si distinguerà nel cubo formato il vero luogo delle unità, con separare a destra il triplo de' caratteri, che si veggono separati nel numero proposto. Così il cubo di 2'3 sarà 12'167, quello di 2'35 sarà 12'977875, e quello di '54 sarà '157464. Ma quì ancora si vuol avere l'avvertenza, che se mai nel cubo formato non s'incontrino tanti caratteri, quanti bisogna separarne per avere il vero luogo delle unità; in tal caso dovranno supplirsi i caratteri mancanti con altrettanti zeri, da apporsi immediatamente innanzi al luogo, che si cerca. Onde il cubo di '2 sarà '008, quello di '15 sarà '003375, quello di '02 sarà '000008, e quello di '015 sarà '000003375.

## §. IV.

### *Dell' Estrazione della radice cuba.*

278. Spiegata la maniera di formare il cubo di qualsivoglia numero, passeremo ora a far vedere, come per lo contrario da qualsivoglia numero, che si voglia considerare come cubo, possa cavarsi la sua radice. Ma per questa operazione bisogna prima avvertire, che non essendo effettivamente cubi tutti i numeri possibili; non sempre può ritrovarsi con esattezza la radice cuba di un dato numero. Così fra gl' interi, che vanno da 1 persino a 1000, abbiamo dieci soli cubi, i quali siccome sono 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,

729, 1000, così anno per loro radici 1, 2, 3, 4, 5; 6, 7, 8, 9, 10; ma tutti gli altri, che fra quelli si tramezzano, di lor natura non sono cubi, onde si è, che sia impossibile di determinare esattamente le loro radici.

279. Quindi, non essendo cubo il dato numero, non si potrà in altra guisa determinare la sua radice, se non che per via di approssimazione, cioè con ritrovare quella del cubo, che più si avvicina al numero dato. E quantunque una tale approssimazione con impiegare i rotti decimali possa andare all'infinito; nientedimeno, per ora, siccome vogliamo supporre, che il dato numero sia intero, così ci contenteremo di prendere tra gl' interi medesimi il cubo, che più si avvicina al numero proposto. E perciò essendo 27 il cubo, che più si avvicina a 40; diremo, che sia 3 la radice prossima cuba di 40, e che vi sia 13 d'avanzo; e similmente, essendo 64 il cubo, che più si avvicina a 70, diremo, che sia 4 la radice prossima cuba di 70; e che vi sia 6 d'avanzo.

280. Or per intendere l'artificio, che tengono gli Arimmetici in estrarre la radice cuba, o esatta, o prossima di qualunque numero composto, è necessario prima, che ella si sappia estrarre da ogni numero, che sia espresso o con uno, o con due, o con tre caratteri. Ma per queste tali estrazioni non dovremo fare altra cosa, se non che mandare a memoria i primi nove cubi 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, che s'incontrano tra gl' interi, e notare altresì le loro rispettive radici 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Imperocchè in questa maniera, siccome potremo facilmente accorgerci, se il numero, di cui si tratta, sia cubo, o nò; così nel caso, che non lo sia, non dureremo fatica in scegliere il cubo che più ad esso si avvicina; onde con somma speditezza determineremo eziandio la radice, di cui egli è capace.

281. E' necessario ancora avvertire, che siccome il prodotto di due numeri diviso per uno di essi dee darci in quoziente l'altro numero; così,

se mai si avesse il triplo di quel prodotto, in tal caso bisognerebbe dividerlo per lo triplo di uno de' numeri per avere l'altro in quoziente. In effetto, essendo 12 il prodotto delli due numeri 3, e 4; sarà 4 il quoziente di 12 diviso per 3; ma se mai in luogo di 12 si avesse il suo triplo 36, allora, per avere l'istesso quoziente 4, si dovrebbe dividere 36 per 9, che è il triplo di 3. E similmente, essendo 24 il prodotto di 4 per 6, sarà 6 il quoziente di 24 diviso per 4: ma se mai in vece di 24 si avesse il suo triplo 72; in questo caso, per avere l'istesso quoziente 6, bisognerebbe dividere 72 per 12, che è il triplo di 4.

282. Avvertite tali cose, veniamo ora all' artificio, che dee tenersi per estrarre la radice cuba, sia esatta, sia prossima da qualunque numero composto. Ed in primo luogo, avanti d' incominciare l' estrazione della radice, che si dimanda, egli è necessario, che dopo essersi segnato con un punto il primo carattere del numero proposto, se ne segnino altri in appresso con legge tale, che tra due prossimi segnati ne restino sempre altri due non segnati. E bisogna ciò fare per due ragioni. La prima si è, perchè così conosceremo di quanti caratteri debba costare la radice cercata, per dover essere tanti per l' appunto, quanti se ne vedranno segnati nel dato numero. E l' altra si è, perchè colla scorta de' caratteri, che si veggono segnati nel numero proposto, ci riescirà facile altresì di ritrovare ad uno ad uno quei della radice medesima.

283. Per andare intanto con ordine, suppongasi primieramente, che il numero proposto sia tale, che debbansi in esso segnare due soli caratteri, siccome è il seguente 79507, in cui il primo carattere da segnarsi è 7, ed il secondo è 9. La sua radice cuba adunque dovrà costare parimente di

79507

due caratteri, i quali potranno considerarsi come

sue

sue parti. E per questanto è stato dimostrato di sopra, siccome nel dato numero dovranno contenersi i cubi di dette parti, il triplo del prodotto del quadrato della prima per la seconda, ed il triplo del prodotto del quadrato della seconda per la prima; così il cubo della prima parte si estenderà persino al 9, il triplo del primo prodotto passerà più oltre persino al 5, il triplo del secondo prodotto passerà ancora più innanzi persino al 0, ed il cubo della seconda parte giungerà persino al 7, che è il primo carattere del numero proposto.

284. Quindi, conforme per avere la prima parte di detta radice, non dovrà farsi altra cosa, se non che prendere la radice cuba prossima di 79, la quale è 4; così se tolto da 79 il cubo di 4, che è 64, appongasi al residuo 15 il 5, che viene

| 79507 | 43 |
|---|---|
| 155 | 48 |
| 110 | |
| 27 | |

in appresso, si avrà l'altra parte con dividere 155 per 48, che è il triplo del quadrato di 4, e con notare il quoziente di questa divisione, il quale è 3. Ma dopo essersi ritrovato questo quoziente, bisogna poi fare tre sottrazioni, cioè prima da 155 dovrà togliersi 144, che è il triplo del prodotto del quadrato di 4 per 3; indi, apposto al residuo 11 l'altro seguente carattere 0, si dovrà da 110 togliere 108, che è il triplo del prodotto del quadrato di 3 per 4; e finalmente, apposto al nuovo residuo 2 il rimanente carattere 7, si dovrà da 27 sottrarre il cubo di 3, che similmente è 27.

285. Intanto per maggior compendio queste tre sottrazioni sogliono ridursi ad una sola in questa maniera. Già, dopo essersi ritrovata la prima parte della radice 4, dee prendersi il triplo del suo quadrato 48, affinchè dividendo 155 per 48, possa aversi l'altra parte di 3. Si scriverà adunque

sotto al 48 così il triplo del prodotto di 4 per 3, che è 36, come il quadrato di 3, che è 9, ma con legge tale, che tanto l'uno, quanto l'altro si avanzi di un luogo a destra, secondo vedesi fatto. Si apporranno di poi al 155 i rimanenti due caratteri 0, e 7; e ritrovata la somma di quei tre numeri, che è 5169, si toglierà da 15507 tuttocciò, che si produce, moltiplicando detta somma 5169 per 3. E la ragione è chiara, poicchè in questo solo prodotto si ritrovano racchiusi secondo le giuste loro situazioni, ed il triplo di quello fatto dal quadrato di 4 per 3, ed il triplo dell'altro fatto dal quadrato di 3 per 4, ed il cubo di 3.

| | |
|---|---|
| 79507 | 43 |
| 15507 | 48 |
| | 36 |
| | 9 |
| | 5169 |

286. Or due sono le ragioni, che ci obbligano a fare tali sottrazioni. La prima si è per vedere, se nel numero proposto vi sia qualche avanzo, ed in conseguenza per assicurarci, se la radice ritrovata sia esatta, o prossima. Così nell'esempio di sopra, togliendo da 15507 il prodotto di 5169 per 3, non rimane avanzo veruno; onde dobbiamo conchiudere, che 43 sia radice cuba esatta di 79507. Ma se mai si voglia cavare la radice cuba da 140649, avvalendoci dello stesso artificio, ritroveremo, che ella sia 52; ma avremo ancora 41 di avanzo, secondo vedesi quì sotto.

| | |
|---|---|
| 140649 | 52 |
| 15649 | 75 |
| 41 | 30 |
| | 4 |
| | 7804 |

287. L'al-

287. L' altra ragione si è, perchè siccome l' altra parte della radice, che si ritrova per mezzo della divisione, si dee talvolta minorare; così si conosce il minoramento da farsi per l' impossibilità, che s' incontra in fare le riferite sottrazioni. In effetto, volendosi cavare la radice cuba dal numero 178616; sarà 5 la radice cuba prossima di 178; e dividendo 536 per 75, sarà 7 il quoziente di questa divisione; ma preso il prodotto, che dee essere sottratto da 53616, si ritroverà, che la sottrazione non possa farsi; onde dovrà minorarsi quel quoziente, ed in vece di 7 prenderli 6.

| | |
|---|---|
| 178616 | 56 |
| 53616 | 75 |
| 3000 | 90 |
| | 36 |
| | 8436 |

dersi 6. E poicchè avvalendoci di 6, la sottrazione prescritta secondo la regola può farsi, e rimane 3000; perciò diremo, che sia 56 la radice cuba prossima di 178616, e che vi sia 3000 d' avanzo.

288. Si vuole ancora quì avvertire, che l' altra parte della radice, che si cerca, può essere talvolta il zero; e ciò avviene, quantevolte non può farsi la divisione, per mezzo di cui ella si ritrova. Debbasi, a cagion di esempio, estrarre la radice cuba da 68560; ed essendo 4 la radice cuba prossima di 68; sarà 4 ancora la prima parte della radice, che si dimanda. Or tolto

| | |
|---|---|
| 68560 | 40 |
| 4560 | 48 |
| | 00 |
| | 00 |
| | 4800 |

da 68 il cubo di 4, che è 64, ed apposto al residuo 4 il seguente carattere 5, non può dividersi 45 per lo triplo del quadrato di 4, che è 48. Onde l'altra parte della stessa radice sarà 0; e poicchè togliendo da 4560 il prodotto di 4800 per 0, rimane l'istesso 4560, diremo, che sia 40 la radice prossima cuba di 68560, e che vi sia 4560 d'avanzo.

289. Sempre quando si sà estrarre la radice cuba da un numero, in cui sono due i caratteri da segnarsi, potrà ella estrarsi parimente da ogn'altro numero, in cui si debbano segnare tre caratteri. Sia perciò il numero 40001688, e segnati i tre caratteri situati nel primo, quarto, e settimo luogo, ritrovasi la radice cuba prossima di tutto ciò, che si estende persino al secondo carattere

| 40001688 | 342 |
|---|---|
| 697688 | 3468 |
| | 204 |
| | 4 |
| | 348844 |

segnato, cioè di 40001, la quale sarà 34, e darà 697 d'avanzo. Quindi, considerando 34 come una delle due parti della radice, che si cerca, si ritroverà l'altra parte con apporre al 697 il carattere, che segue 6, e con dividere 6976 per 3468, che è il triplo del quadrato di 34. E poicchè il quoziente di questa divisione è 2, e con aggiungere a 3468, così il triplo del prodotto di 34 per 2, che è 204, come il quadrato di 2, che è 4, secondo la maniera esposta di sopra (285), si può il prodotto della somma 348844 per 2 togliere da 697688, senza che si abbia avanzo veruno; sarà 2 l'altra parte, e tutto il numero 342 sarà radice cuba esatta del numero proposto.

290. Per la stessa ragione, sapendosi estrarre la radice cuba da un numero, in cui sono tre i caratteri

ratteri da segnarsi, si potrà la medesima estrarre altresì da ogn'altro numero, in cui si debbano segnare quattro caratteri. Sia perciò il numero 13044257987, e segnati i quattro caratteri situati nel primo, quarto, settimo, e decimo luogo, ritrovasi la radice cuba di tuttocciò, che si estende persino al secondo carattere segnato, cioè di 13044257, la quale sarà 235, e darà 66382 d'avanzo. Quindi, considerandola come una delle due

| 13044257987 | 2354 |
|---|---|
| 66382987 | 165675 |
| 123 | 2820 |
| | 16 |
| | 16595716 |

parti della radice, che si dimanda, si ritroverà l'altra parte, con apporre a quell'avanzo il carattere, che segue 9, e con dividere 663829 per 165675, che è il triplo del quadrato di 235. E poicchè il quoziente di questa divisione è 4, e con aggiungere a 165675 così il triplo del prodotto di 235 per 4, che è 2820, come il quadrato di 4, che è 16, secondo la maniera esposta di sopra (285), si può il prodotto della somma 16595716 per 4 togliere da 66382987, e vi rimane 123; perciò diremo, che sia 2354 la radice cuba prossima del numero proposto, e che vi sia d'avanzo 123.

291. Adunque andando con ordine, potrà estrarsi la radice cuba da ogn'altro numero composto, con far uso sempre del medesimo artificio, il quale dipende da quel teorema generale, che considerando la radice come composta di due parti; si debbano contenere nel dato numero i cubi di dette parti, il triplo del prodotto del quadrato della prima per la seconda, ed il triplo del prodotto del quadrato della seconda per la prima. Ma qualunque sia il numero proposto, bisogna sempre

avvertire, che ſiccome l' altra parte della radice ritrovaſi con dividere il triplo del primo prodotto per lo triplo del quadrato della prima parte già ritrovata; così, ſe mai queſta diviſione non poſſa farſi, o per incontrarſi il dividendo minore del diviſore, o pure per non eſſer capace il quoziente di minoramento tale, che poſſa aver luogo la ſottrazione neceſſaria, in tal caſo dovrà ſcriverſi zero come altra parte della radice, che ſi cerca.

292. Del rimanente, ſe la radice cuba voglia eſtrarſi da qualche rotto, non dovrà farſi altra coſa, ſe non che cavarla così dal ſuo numeratore, come dal ſuo denominatore; ed in caſo, che queſto ſecondo non ſia cubo perfetto, biſognerà renderlo tale, con moltiplicare l' uno, e l' altro per un qualche numero, che ſia valevole a farlo. Così la radice cuba di $\frac{8}{27}$ ſarà $\frac{2}{3}$, quella di $\frac{27}{64}$ ſarà $\frac{3}{4}$, e quella di $\frac{125}{216}$ ſarà $\frac{5}{6}$. Ma volendoſi eſtrarre la radice cuba da $\frac{15}{32}$, ſi dovrà prima rendere cubo il ſuo denominatore, il che potrà farſi con moltiplicare per 2 tanto il 15, quando il 32; poicchè traſformandoſi il dato rotto in $\frac{30}{64}$, ſarà $\frac{3}{4}$ la ſua proſſima radice cuba, e vi ſarà $\frac{3}{64}$ d' avanzo.

293. Che ſe poi debba eſtrarſi la radice cuba da un numero, che ſia compoſto d' intero, e rotto; in tal caſo ſi ridurrà l' intero eziandio a rotto, ed indi ſi caverà la radice, come ſe il dato numero foſſe tutto rotto. E quì ancora biſogna avvertire, che non eſſendo cubo il denominatore del rotto, dee renderſi tale nella maniera eſpoſta di ſopra. Così, eſſendo 12 $\frac{19}{27}$ il numero dato, ſi ridurrà il 12 a $\frac{324}{27}$; onde, eſſendo 12 $\frac{19}{27}$ l' iſteſſo, che $\frac{343}{27}$, ſarà $\frac{7}{3}$, o pure 2 $\frac{1}{3}$ la ſua radice cuba. E così ancora, eſſendo 16 $\frac{3}{4}$ il numero propoſto, ſi ridurrà il 16 a $\frac{64}{4}$; e pertanto eſſendo 16 $\frac{3}{4}$ l'iſteſ-

ſo

so, che $\frac{67}{4}$, ovvero $\frac{134}{8}$, sarà $\frac{5}{2}$, o pure $2\frac{1}{2}$ la sua prossima radice cuba, e vi sarà $\frac{9}{8}$, ovvero $1\frac{1}{8}$ d' avanzo.

294. Se il numero proposto contiene rotto decimale, si caverà da esso la radice cuba, considerandolo come intero; e si distinguerà nella radice cavata il vero luogo delle unità, con separare a destra tanti caratteri, quanti ne addita la terza parte di quelli, che si veggono separati nel numero medesimo: onde se mai in questo il numero de' caratteri separati non sia divisibile per 3, bisognerà renderlo tale, con aggiungere ad essi uno, o due zeri a destra, colla quale aggiunta diverrà cubo ancora il denominatore del rotto decimale. Così, la radice cuba di 12'167 sarà 2'3, e quella di 12'977875 sarà 2'35. Ma se mai il numero dato sia 12'2, si prenderà in vece di esso 12'200, e si ritroverà, che la sua prossima radice cuba sia 2'3, e che vi sia d' avanzo '033.

295. Finalmente rimane quì a far vedere, come non potendosi da un numero intero cavare esattamente la radice cuba; possiamo per mezzo de' rotti decimali sempre più ad essa avvicinarci. Vogliasi perciò cavare la radice cuba da 13, che non è cubo perfetto; ed essendo 13 l' istesso, che 13'000, si potrà in vece di 13 sostituire 13'000, la di cui radice cuba prossima si ritroverà essere 2'3. Ma in luogo di 13 si potrebbe ancora surrogare 13'000000, o pure 13'000000000, ed in questo caso la prossima radice cuba sarebbe 2'35, ovvero 2'353. Ed egli è chiaro, che quanti più zeri triplicati si apporranno al 13, tanto maggiormente ci accosteremo alla sua vera radice cuba.

296. Intanto questo artificio può praticarsi ancora ne' medesimi numeri, che contengono rotti decimali. Così, dovendosi cavare la radice cuba da 13'045, e non essendo questo numero cubo perfetto; potrà sostituirsi in suo luogo, o 13'045000, o pure 13'045000000, e si ritroverà, che la sua prossima radice cuba sia o 2'35, ovvero 2'354. Anzi

zi ne' rotti ordinarj eziandio può essere impiegato l'istesso artificio. Imperocchè, supposto a cagion di esempio, che sia $\frac{15}{8}$ il rotto, da cui dee cavarsi la radice cuba, si ritroverà essere 2'466 la radice prossima del numeratore 15, e 2 la radice esatta del denominatore 8; onde, dividendo la prima 2'466 per la seconda 2; sarà il quoziente di questa divisione 1'233 la radice cuba prossima del rotto proposto.

## CAPITOLO IV.

### *Della Ragione, e della Proporzione.*

297. LA comparazione di due grandezze omogenee, secondo la loro quantità dicesi *Ragione*; e poichè questa comparazione può farsi o esaminando quanto l'una contiene dell'altra, ovvero di quanto da quella differisce; perciò nel primo caso la ragione vien detta *Geometrica*, nel secondo *Aritmetica*. Or siccome le grandezze omogenee, che si comparano, chiamansi termini della ragione, così la prima di esse, ch'è quella, che si compara, dicesi suo antecedente; e la seconda, ch'è quella colla quale si compara, suo conseguente. Alla ragione ascrivesi ancora la sua quantità, per cui s'intende quel quanto, che l'antecedente contiene del conseguente, quando la ragione è geometrica, e l'eccesso, o il difetto dell'antecedente riguardo al conseguente quando la ragione è aritmetica.

298. E poichè per esprimere con numeri due, o più quantità, che si vogliono comparare, si devono concepire divise in parti uguali ad una loro parte aliquota comune; così per determinare la quantità della ragione Geometrica dovrà dividersi il numero delle parti dell'antecedente per il numero delle parti del conseguente, ed il quoto, per l'indole della divisione, indicherà quanto l'antecedente contiene del suo conseguente. Ma ogni rotto è uguale al quoto, che si ha dividendo il suo numeratore per il suo denominatore: dunque

la

la quantità di ogni ragione Geometrica è uguale al rotto, che ha per numeratore il suo antecedente, e per denominatore il suo conseguente. E perciò non si cambia una ragione con moltiplicarne, o dividerne i termini per un medesimo numero (122, e 123). Esprima 18 il numero delle parti dell'antecedente, e 6 quello delle parti del conseguente; indicherà 3, quoto di 18 diviso per 6, che il 18 contiene il triplo di 6; e perciò il rotto $\frac{18}{6}$ sarà la quantità della ragione di 18 a 6; ma questo rotto è uguale all'altro $\frac{90}{30}$ che si ha con moltiplicare per 5 il numeratore, ed il denominatore, dunque la ragione di 18 a 6 è uguale a quella di 90 a 30.

299. Essendo espresse le ragioni dalle loro quantità; si dovrà di esse giudicare dalle quantità medesime; e perciò si dicono di uguaglianza, e di maggiore, o minore disuguaglianza, secondo che le loro quantità sono uguali, maggiori, o minori dell'unità. Così la ragione di 8 a 5 dicesi di maggior disuguaglianza, quella di 7 a 7 di uguaglianza, e quella di 6 a 11 di minor disuguaglianza, perchè il rotto $\frac{8}{5}$, ch'è la quantità della prima, è maggiore dell'unità, ed il rotto $\frac{7}{7}$, ch'è la quantità della seconda, è uguale all'unità, e il rotto $\frac{6}{11}$, ch'è la quantità della terza, è minore dell'unità (119).

300. Conforme poi sono uguali le ragioni, che hanno uguali le quantità, così sono le une maggiori, o minori delle altre, secondo che le loro quantità sono maggiori, o minori delle quantità di quelle. Sicchè le ragioni hanno tra se lo stesso rapporto delle loro quantità. Onde sono duple, triple, quadruple ec., quelle, le di cui quantità sono doppie, triple, quadruple ec. delle quantità di altre; come ancora sono le metà, le terze, le quarte parti ec. quelle, le di cui quantità sono le metà, le terze, le quarte parti ec. delle quantità

tità di altre. La ragione di 5 a 15, è uguale a quella di 7 a 21, maggiore di quella di 3 a 18, e minore di quella di 6 a 12, perchè il rotto $\frac{5}{15}$, ch'è la quantità della prima, è uguale al rotto $\frac{7}{21}$, ch'è la quantità della seconda, maggiore del rotto $\frac{3}{18}$, ch'è la quantità della terza, e minore del rotto $\frac{6}{12}$, ch'è la quantità della quarta. Così la ragione di 30 a 5 è doppia di quella di 9 a 3, tripla di quella di 24 a 12, la metà di quella di 96 a 8, e la terza parte di quella di 36 a 2; perchè il rotto $\frac{30}{5}$, ch'è la quantità della prima, è il doppio del rotto $\frac{9}{3}$, ch'è la quantità della seconda, il triplo del rotto $\frac{24}{12}$, ch'è la quantità della terza, la metà del rotto $\frac{96}{8}$, ch'è la quantità della quarta, e la terza parte del rotto $\frac{36}{2}$, ch'è la quantità della quinta.

301. Paragonando adunque le ragioni per le loro quantità, si potranno avere come assiomi i seguenti teoremi. Primo, che le ragioni uguali ad una medesima sieno uguali tra se. Secondo, che sieno uguali le ragioni, che sono ugualmente moltiplici, o parti di una medesima. Terzo, che se di due ragioni uguali una sia maggiore, o minore di un'altra, la rimanente debba essere anche di quella maggiore, o minore. Quarto, che le grandezze uguali paragonate alle uguali hanno a quelle uguali ragioni. Quinto, che una medesima grandezza paragonata ad altre uguali ha a quelle uguali ragioni. Sesto, che delle grandezze disuguali la maggiore ha ad una medesima ragion maggiore, che la minore. E settimo, finalmente, che una medesima grandezza paragonata ad altre disuguali ha alla minore maggior ragione, che alla maggiore. Come in effetto le quantità di tutte le ragioni uguali a quella di 3 a 4 devono necessariamente essere uguali al rotto $\frac{3}{4}$, e perciò ugua-

uguali tra se. Le quantità delle ragioni, che sono il doppio di quella di 5 a 7, devono necessariamente essere uguali al doppio del rotto $\frac{5}{7}$, siccome devono essere uguali alla metà di questo rotto le quantità di quelle, che sono la metà dell' espressata ragione; e perciò sì le une, che le altre uguali tra se. Per essere uguali le ragioni di 3 a 12, e di 7 a 28, devono essere anche uguali i rotti $\frac{3}{12}$, e $\frac{7}{28}$, che ne sono le quantità; onde di quanto il rotto $\frac{3}{12}$ è minore di $\frac{8}{15}$, e maggiore di $\frac{2}{17}$, di altrettanto il rotto $\frac{7}{28}$ è minore di $\frac{8}{15}$, e maggiore di $\frac{2}{17}$; e perciò di quanto la ragione di 3 a 12 è minore di quella di 8 a 15, e maggiore dell' altra di 2 a 17, di altrettanto quella di 7 a 28. è minore della prima, e maggiore della seconda. Poichè il rotto $\frac{7}{8}$ è maggiore di $\frac{5}{8}$, siccome il rotto $\frac{4}{7}$ è maggiore di $\frac{4}{9}$; perciò la ragione di 7 a 8 è maggiore di quella di 5 a 8, e la ragione di 4 a 7 è maggiore di quella di 4 a 9.

302. La moltiplicazione delle ragioni, che si eseguе moltiplicandone le quantità, dicesi composizione, le ragioni, che si moltiplicano componenti, e quella, che si produce composta. Ond' è, che se le ragioni componenti sono uguali, la composta dicesi tanto moltiplicata di ciascheduna di esse, quanto è il numero delle componenti; e di altrettanto ciascheduna di esse dicesi summoltiplicata della composta. Dunque secondochè le ragioni componenti uguali sono due, tre, quattro ec., la composta dicesi duplicata, triplicata, quadruplicata ec., di ciascheduna delle componenti; ed ogn'una di esse sudduplicata, suttriplicata, suqquadruplicata ec., della composta.

303. Or siccome sono uguali i prodotti, che si hanno moltiplicando numeri uguali per altri uguali tra se; così uguali ancora sono le ragioni composte dallo stesso numero di componenti, rispettiva-

 men-

mente uguali. Ed essendo così; egli è facile l'intendersi, che sono uguali e le ragioni ugualmente moltiplicate; e le ugualmente summoltiplicate delle ragioni uguali.

304. Da essere il prodotto di una grandezza qualunque, moltiplicata per l'unità, la grandezza medesima, ne siegue che se una di due ragioni componenti è d'uguaglianza, la composta è simile all'altra.

305. Di due ragioni dicesi una essere inversa, ovvero reciproca dell'altra, quando le loro quantità sono tra se opposte, cioè sono tali, che moltiplicate danno in prodotto l'unità. Dunque se una di due ragioni componenti è simile all'altra inversa, la composta è ragione di uguaglianza. Della ragione di 7 a 11 è reciproca quella di 11 a 7, perchè se $\frac{7}{11}$, quantità della prima, si moltiplica per $\frac{11}{7}$, quantità della seconda, il prodotto $\frac{77}{77}$ è uguale all'unità: e per la ragione medesima della stessa di 7 a 11, n'è reciproca quella di 22 a 14, e di 33 a 21.

306. Essendo le quantità delle ragioni rotti, che hanno per numeratori gli antecedenti, e per denominatori i conseguenti delle ragioni medesime; egli è chiaro, che le quantità delle ragioni composte sono rotti, che hanno per numeratori i prodotti degli antecedenti, e per denominatori i prodotti de' conseguenti delle ragioni componenti (159). Ond'è, che si compongono le ragioni con moltiplicarne gli antecedenti, ed i conseguenti: e le ragioni di due prodotti sono composte da quelle de' moltiplicandi, e de' moltiplicatori. Delle ragioni di 3 a 7, e di 5 a 9, sono $\frac{3}{7}$, e $\frac{5}{9}$ le quantità, delle quali il prodotto è $\frac{15}{63}$, quantità della ragione di 15 a 63: sicchè la ragione del prodotto 15 al prodotto 63 è composta da quella del moltiplicando 3 al moltiplicando 7, e dall'altra del moltiplicatore 5 al moltiplicatore 9.

307. Essendo inoltre quantità della reciproca di una

una ragione qualunque il rotto, che ha per numeratore il conseguente, e per denominatore l'antecedente della ragione medesima; facilmente se ne deduce, che la quantità della ragione composta da una di due date ragioni, e dalla reciproca dell'altra, sia un rotto, che ha per numeratore il prodotto dell'antecedente della prima, moltiplicato per il conseguente della seconda, e per denominatore il prodotto del conseguente della prima, moltiplicato per l'antecedente dell'altra. Quindi è, che l'antecedente, ed il conseguente di una sì fatta ragione composta sono rotti, che hanno per numeratori, rispettivamente, l'antecedente, ed il conseguente della prima ragione, e per denominatori l'antecedente, ed il conseguente della seconda (163). Onde la ragione di due rotti è composta dalla diretta di quella de' numeratori, e dalla reciproca di quella de' denominatori; e perciò se sono uguali i denominatori, o i numeratori, la ragione, de' rotti è simile; nel primo caso, alla diretta di quella de' numeratori, e nel secondo, alla reciproca di quella de' denominatori. Così la reciproca della ragione di 5 a 8 è quella di 8 a 5, la di cui quantità è $\frac{8}{5}$, ed è $\frac{7}{12}$ la quantità di quella di 7 a 12; onde $\frac{56}{60}$, il cui numeratore 56 è il prodotto di otto moltiplicato per 7, e il denominatore 60 quello di 5 moltiplicato per 12, è la quantità della composta da quella di 7 a 12, e dalla reciproca dell'altra di 5 a 8: ma $\frac{56}{60}$ è ancora il quoto di $\frac{7}{5}$ diviso per $\frac{12}{8}$, e perciò la quantità della ragione di $\frac{7}{5}$ a $\frac{12}{8}$; dunque la ragione del rotto $\frac{7}{5}$ all' altro $\frac{12}{8}$ è composta da quella de' numeratori 7, e 12, e dalla reciproca di quella de' denominatori 5, e 8. E poichè il quoto di $\frac{9}{11}$ diviso per $\frac{7}{11}$ è $\frac{99}{77}$ uguale a $\frac{9}{7}$, e quello di $\frac{5}{8}$ diviso per $\frac{5}{6}$ è $\frac{30}{40}$, uguale a $\frac{6}{8}$; perciò la ragione di $\frac{9}{11}$ a $\frac{7}{11}$ è uguale a quella di 9 a 7; e quella di $\frac{5}{8}$ a $\frac{5}{6}$ è uguale a quella di 6 a 8.

 308. Poi-

308. Poichè il prodotto, che si ha moltiplicando una grandezza qualunque per una frazione, è una parte di essa grandezza, denominata dalla frazione medesima (156); perciò si hanno le parti di due, o più grandezze, con moltiplicarle per le frazioni che le denominano; onde la ragione delle parti di due grandezze è composta dalle ragioni delle grandezze, e delle frazioni, che le denominano (306): ma le frazioni, che hanno lo stesso denominatore, sono tra se come i loro numeratori (307). Dunque la ragione delle parti di due grandezze denominate da frazioni, che hanno lo stesso denominatore, è composta dalle ragioni delle grandezze, e de' numeratori; perlocchè esse parti sono uguali quando la ragione delle grandezze è simile alla reciproca di quella de' numeratori (305). Il prodotto di 21 moltiplicato per $\frac{5}{9}$, è i $\frac{5}{9}$ di 21, come è li $\frac{7}{9}$ di 15, il prodotto di 15 moltiplicato per $\frac{7}{9}$: ma la ragione de' prodotti è composta da quella de' moltiplicandi, e de' moltiplicatori; perciò quella de' $\frac{5}{9}$ di 21 ai $\frac{7}{9}$ de' 15, è composta da quelle di $\frac{5}{9}$ a $\frac{7}{9}$, e di 21 a 15, ovvero da quelle di 5 a 7, e di 21 a 15, delle quali le prima è simile alla reciproca dell' altra; onde i $\frac{5}{9}$ di 21 sono uguali alli $\frac{7}{9}$ di 15: ed in fatti $\frac{105}{9}$ sono così gli uni, che gli altri.

309. Essendo il prodotto di due grandezze tra se moltiplicate, uguale alla somma de' prodotti, che si hanno moltiplicando ciascheduna parte dell' una per l' altra (212); ne siegue che la differenza de' prodotti, che si hanno moltiplicando così una grandezza, che una sua parte per un' altra grandezza, sia uguale al prodotto, che si ha moltiplicando la parte rimanente per la grandezza medesima. Quindi è, che la differenza delle parti simili di due grandezze disuguali, è la parte ad esse simile della differenza delle stesse grandezze. In fatti $\frac{148}{5}$ prodotto di 37 moltiplicato per $\frac{4}{5}$, è uguale alla

alla somma di $\frac{116}{5}$, prodotto di 29 moltiplicato per $\frac{4}{5}$, e di $\frac{32}{5}$, prodotto di 8 moltiplicato per $\frac{4}{5}$. Onde $\frac{148}{5}$ è maggiore di $\frac{116}{5}$ per $\frac{32}{5}$; e perciò li $\frac{4}{5}$ di 37 sono maggiori di quei di 29 pei $\frac{4}{5}$ di 8 loro differenza.

310. Intendesi per proporzione l'uguaglianza di due ragioni, la quale dicesi *geometrica*, se le ragioni sono geometriche, ed *aritmetica*, se sono aritmetiche. Qualunque ella sia, richiede sempre quattro termini, che si dicono proporzionali, de' quali due sono gli antecedenti delle ragioni uguali, e gli altri due i loro conseguenti. Può non pertanto ella avere tre soli termini, locchè avviene sempre quando il secondo è conseguente della prima, ed antecedente della seconda ragione, il quale allora chiamasi mezzo proporzionale: una tal proporzione dicesi *continua*, a differenza dell'altra, che ha quattro termini distinti, la quale dicesi *discreta*. Quantunque in questa i due termini possono essere di una specie diversa degli altri due, qualora ella è geometrica; nella continua devono necessariamente essere tutti di una medesima specie. Poichè la ragione geometrica di 3 a 9 è simile a quella di 4 a 12, perciò 3, 9, 4, 12 costituiscono una proporzione geometrica, della quale essi sono i termini, che per essere il conseguente 9 della prima ragione, differente dall'antecedente 4 della seconda, la proporzione è discreta. Inoltre essendo la ragione di 7 a 21 simile a quella di 21 a 63; 7, 21, e 63, costituiscono una proporzione geometrica, della quale il secondo termine 21 è conseguente della prima ragione, e antecedente della seconda; perlocchè esso è mezzo proporzionale, e la proporzione continua.

311. Per picciola riflessione, che si faccia a ciò che della ragione composta si è detto, facilmente se ne deduce, che se i termini di una proporzione geometrica qualunque si moltiplichino, o dividano pei termini rispettivi di un'altra, sieno pro-

porzionali sì i prodotti, che i quoti di siffatte moltiplicazioni, e divisioni. In fatti se i termini della proporzione 3 a 12, come 5 a 20, si moltiplichino, o dividano, per li rispettivi termini dell' altra 7 a 21 come 9 a 27; si avranno nel primo caso, le ragioni di 21 a 252, e di 45 a 540, composte, la prima da quelle di 3 a 12, e di 7 a 21, e l'altra da quelle di 5 a 20, e di 9 a 27; e nel secondo caso le ragioni di $\frac{3}{7}$ a $\frac{12}{21}$, e di $\frac{5}{9}$ a $\frac{20}{27}$, composte, la prima da quelle di 3 a 12, e di 21 a 7, e l'altra da quelle di 5 a 20, e di 27 a 9, uguale a quella di 21 a 7; e perciò la ragione di 21 a 252 uguale a quella di 45 a 540, e la ragione di $\frac{3}{7}$ a $\frac{12}{21}$ uguale a quella di $\frac{5}{9}$ a $\frac{20}{27}$ (303).

312. E' necessario quì avvertire, che tra le due ragioni uguali si frappongono nella proporzione aritmetica tre punti (.·.), e nella geometrica quattro (::), o il segno dell'uguaglianza (=). Onde la geometrica si scrive così; A : C :: B : D, ovvero A : C = B : D, e l'aritmetica A : C .·. B : D; e si proferisce, di qualunque specie ella sia, dicendo A è a C, come B a D. E' d' avvertirsi ancora, che da ora innanzi coi vocaboli ragione, e proporzione, intenderemo sempre di esprimere la ragione, e la proporzione geometrica; poichè di esse sole si ha bisogno nel calcolo, che s'insegna.

313. Or se di un rotto, che ha per numeratore il prodotto di tutti i termini, meno l' ultimo, di una serie qualunque di grandezze, e per denominatore, il prodotto di tutti i termini della medesima serie, meno il primo; si divida sì il numeratore, che il denominatore per lo prodotto de' termini della serie meno il primo, e l' ultimo; si avrà un altro rotto ad esso uguale, che ha per numeratore il primo, e per denominatore l' ultimo de' riferiti termini (123). Ma il primo rotto è la quantità della ragione composta di tutte le ragioni, che nella serie hanno ordinatamente le grandezze precedenti alle seguenti, dalla prima fino all' ultima (306); ed il secondo rotto è la quantità

della ragione, che la prima di queste grandezze ha all' ultima (298). Dunque in ogni serie di grandezze, la prima è all' ultima in ragione composta di tutte le ragioni, che hanno ordinatamente le grandezze precedenti alle seguenti, dalla prima fino all' ultima medesima. Dal che immediatamente se ne deduce, che se tutte le ragioni, che hanno le grandezze precedenti alle seguenti, sieno tra se uguali, nel qual caso la serie de' termini continuamente proporzionali, dicesi *progressione*; la ragione della prima all' ultima è tanto moltiplicata di ciascheduna delle ragioni, che hanno le grandezze intermedie alle loro seguenti, quanto è il numero delle grandezze, che compongono la serie, meno una; e di altrettanto ciascheduna di queste ragioni è summoltiplicata di quella. Perlocchè in ogni Progressione la ragione della prima alla terza è duplicata, della prima alla quarta triplicata, e della prima alla quinta quadruplicata; e così successivamente delle ragioni della prima alla seconda, ovvero della seconda alla terza, o della terza alla quarta, della quarta alla quinta, e così all' infinito. E scambievolmente ciascheduna di queste è sudduplicata della ragione della prima alla terza, suttriplicata di quella della prima alla quarta, suqquadruplicata di quella della prima alla quinta, e così in appresso (302). Come in effetto se del rotto $\frac{2268}{10584}$, il di cui numeratore è il prodotto, che si ha moltiplicando tra se i termini della serie 3, 7, 9, 12, e 14, meno l'ultimo 14, e il denominatore quello, che si ha moltiplicando i termini della medesima serie, meno il primo 3, si divida sì il numeratore, che il denominatore per 756, prodotto, che si ha moltiplicando i termini della serie stessa, meno il primo 3, e l'ultimo 14, si avrà il rotto $\frac{3}{14}$ uguale ad esso; e perciò la ragione di 2268 a 10584, uguale a quella di 3 a 14: ma la ragione di 2268 a 10584 è composta dalle ragioni di 3 a 7, di 7 a 9, di 9 a 12, e di 12 a 14; dunque da queste ragioni è anche composta quella di 3 a 14.

 Così

Così la ferie 3, 9, 27, 81, 243, della quale la ragione di 3 a 9 è uguale a quella di 9 a 27, e questa è uguale all'altra di 27 a 81, ch' è uguale alla rimanente di 81 a 243, si dice *Progressione*; e la ragione di 3 a 27; perchè composta dalle ragioni uguali di 3 a 9, e di 9 a 27, è duplicata di ciascheduna di esse, come n' è triplicata quella di 3 a 81, e quadruplicata l'altra di 3 a 243; onde la ragione di 3 a 9 è sudduplicata di quella di 3 a 27, suttriplicata di quella di 3 a 81, e sugquadruplicata di quella di 3 a 243.

314. Poichè sono uguali due ragioni quando gli antecedenti ugualmente contengono, o si contengono ne' loro conseguenti; locchè non può avvenire senza che i conseguenti ugualmente si contengano, o contengano i loro antecedenti; dunque qualora due ragioni sono uguali, uguali ancora sono quelle, che si hanno con inverterne i termini; cioè con paragonare i conseguenti agli antecedenti. Così la ragione di 12 a 4 è uguale a quella di 21 a 7; perchè siccome 12 è il triplo di 4, così 21 è il triplo di 7; ma 4 è la terza parte di 12, siccome 7 è la terza parte di 21; dunque la ragione di 4 a 12 è uguale a quella di 7 a 21.

315. Dovendo gli antecedenti di due ragioni uguali, ugualmente contenere, o contenersi ne' loro conseguenti; e contenendo ogni grandezza se medesima una volta; egli è chiaro, che aggiungendo agli antecedenti di due ragioni uguali, i loro conseguenti; le somme devono ugualmente contenere i conseguenti medesimi; come li devono ugualmente contenere, o contenersi in essi, i residui che si hanno togliendo dagli antecedenti i conseguenti, quando le ragioni uguali sono di maggiore disuguaglianza. Dunque qualora due ragioni sono uguali, uguali ancora sono quelle, che si hanno con comporne, o dividerne i termini, cioè aggiungendo i conseguenti agli antecedenti, o togliendoli da essi, e comparando le somme, o i residui alli conseguenti medesimi. Le ragioni di 20 a 5, e di 32 a 8 sono uguali, perchè 20 contiene il quadru-

druplo di 5, ficcome 32 contiene il quadruplo di 8: ma 5 contiene se medesimo una volta, e una volta 8 contiene se stesso; dunque 25, somma di 20, e 5 contiene il quintuplo di 5, siccome 40, somma di 32 e 8, contiene il quintuplo di 8; e 15 differenza di 20, e 5, contiene il triplo di 5, siccome 24, differenza di 32 e 8, contiene il triplo di 8. Onde sono uguali così le ragioni di 25 a 5, e di 40 a 8, che quelle di 15 a 5, e di 24 a 8.

316. Se due ragioni sono uguali, uguali ancora sono quelle, che si hanno con inverterne, ed indi comporne, o dividerne i termini (314; e 315); onde se i termini di queste altre ragioni s' invertano; si avranno uguali le ragioni degli antecedenti delle prime alle somme di essi, e de' loro conseguenti, nel primo caso; e alle differenze di essi medesimi, e de' loro conseguenti, nel secondo caso. Dunque qualora due ragioni sono uguali, uguali ancora sono quelle, che si hanno col secondo modo di comporne, o col converterne i termini, cioè aggiungendo i conseguenti agli antecedenti, o togliendoli da essi, e comparando gli antecedenti medesimi alle somme, o alli residui. Come in fatti delle ragioni uguali di 3 a 18, e di 5 a 30 sono anche uguali quelle di 18 a 3, e di 30 a 5, e conseguentemente quelle di 21 a 3, e di 35 a 5; e quelle di 15 a 3, e di 25 a 5 (314, e 315); delle quali ragioni invertendo i termini, si hanno uguali le ragioni di 3 a 21, e di 5 a 35, e quelle di 3 a 15, e di 5 a 25.

317. Essendo di quattro grandezze la ragione della prima alla terza composta da quelle della prima alla seconda, e della seconda alla terza; e quella della seconda alla quarta, composta da quelle della seconda alla terza, e della terza alla quarta (313); ne siegue, che qualora le ragioni della prima alla seconda, e della terza alla quarta sono uguali, uguali sieno ancora quelle della prima alla terza, e della seconda alla quarta (303). Dunque quando due ragioni sono uguali, uguali sono ancora quelle, che si hanno con permutarne i termini; cioè

cioè con paragonare tra se gli antecedenti, e i conseguenti. Perlocchè se di due serie di ugual numero di grandezze ordinatamente proporzionali se ne permutano i termini, avranno i termini dell' una ragioni uguali ai rispettivi termini dell'altra. Della proporzione 7 : 35 = 9 : 45, la ragione di 7 a 9 è composta da quelle di 7 a 35, e di 35 a 9; e la ragione di 35 a 45 è composta da quelle di 35 a 9, e di 9 a 45 (313); delle quali componenti quella di 7 a 35 è uguale a quella di 9 a 45, e l'altra di 35 a 9 è comune: onde sono uguali le composte di 7 a 9, e di 35 a 45 (303). Ed egli è chiaro, che essendo le ragioni di 3 a 9, di 9 a 36, di 36 a 72, e di 72 a 18, ordinatamente simili a quelle di 5 a 15, di 15 a 60, di 60 a 120, e di 120 a 30; permutandone i termini sieno simili le ragioni di 3 a 5, di 9 a 15, di 36 a 60, di 72 a 120, e di 18 a 30.

318. Or poichè di due serie di ugual numero di grandezze, che sieno ordinatamente proporzionali, le ragioni delle prime alle ultime sono composte da ugual numero di ragioni rispettivamente uguali (313); perciò sono uguali tra se (303). Come infatti della serie 8 : 4 : 12 : 24, la ragione di 8 a 24 è composta da quelle di 8 a 4, di 4 a 12, e di 12 a 24; siccome nella serie 6 : 3 : 9 : 18, la ragione di 6 a 18 è composta da quelle di 6 a 3, di 3 a 9, di 9 a 18 (313): ma la ragione di 8 a 4 è uguale a quella di 6 a 3, quella di 4 a 12 a quella di 3 a 9, e quella di 12 a 24 a quella di 9 a 18: dunque la ragione di 8 a 24 è uguale a quella di 6 a 18 (303).

319. Inoltre le somme di siffatte serie sono tra se come ciaschedunō dei termini dell'una ai rispettivi termini dell'altra. Imperocchè essendo uguali le ragioni de' primi alli secondi termini; uguali sono ancora quelle delle somme de' primi, e secondi ai secondi medesimi (315), i quali hanno uguali ragioni alli terzi; perlocchè le somme de' primi, e secondi, secondi, e terzi sono ordinatamente proporzionali: onde sono uguali le ragioni delle somme

me dei primi, e secondi alli terzi (318); e le somme de' primi, secondi, e terzi, hanno alli terzi stessi uguali ragioni. Dunque somigliantemente ragionando si dimostra, che le somme dell'espressate serie hanno uguali ragioni agli ultimi loro termini; onde permutandone i termini; sono tra se come i detti termini ultimi; la ragione de' quali è uguale a quelle de' rispettivi rimanenti termini (317), alle quali in conseguenza deve essere anche uguale quella delle somme sudette (301). In fatti delle serie 7 : 21 : 42 : 63; 5 : 15 : 30 : 45, la ragione di 7 a 21 è uguale a quella di 5 a 15, e componendo, la ragione di 28 a 21 è uguale a quella di 20 a 15; ma quella di 21 a 42 è uguale a quella di 15 a 30; dunque 28, 21, e 42 sono ordinatamente proporzionali a 20, 15, e 30; e perciò la ragione di 28 a 42 è uguale a quella di 20 a 30, e componendo quella di 70 a 42 è uguale a quella di 50 a 30: e perchè la ragione di 42 a 63 è uguale a quella di 30 a 45; 70, 42, e 63 sono ordinatamente proporzionali a 50, 30, e 45, e la ragione di 70 a 63 è uguale a quella di 50 a 45: onde componendo, quella di 133 a 63 è uguale a quella di 95 a 45; e permutando, quella di 133 a 95 è uguale a quella di 63 a 45: ma la ragione di 63 a 45 è uguale sì a quella di 42 a 30, che a quella di 21 a 15, e a quella di 7 a 5 (317): dunque a queste ragioni è anche uguale quella di 133, somma della prima serie, a 95, somma dell' altra (301).

320. In ogni proporzione se i rotti, che rappresentano le due ragioni uguali, si riducano colle regole insegnate, alla stessa denominazione, si avranno due rotti uguali, i quali, poichè hanno lo stesso denominatore, devono necessariamente avere uguali i numeratori, de' quali uno è il prodotto dei termini estremi della proporzione, e l' altro il prodotto de' termini di mezzo. Dunque in ogni proporzione il prodotto dei termini estremi è uguale al prodotto di quei di mezzo; perlocchè se la proporzione è continua, il prodotto dei termini estremi

mi è uguale al quadrato del mezzo proporzionale. Se i rotti $\frac{2}{27}$, e $\frac{11}{33}$, che sono le quantità delle ragioni uguali della proporzione $9 : 27 = 11 : 33$, si riducano alla stessa denominazione, si avranno i rotti ad essi uguali $\frac{297}{891}$, e $\frac{297}{891}$, de' quali i numeratori sono uguali, e sono i prodotti di 9 moltiplicato per 33, e di 27 moltiplicato per 11. Similmente se i rotti $\frac{5}{20}$, e $\frac{20}{80}$, che sono le quantità delle ragioni uguali della proporzione continua $5 : 20 = 20 : 80$, si riducano alla stessa denominazione; si avranno i rotti ad essi uguali $\frac{400}{1600}$, e $\frac{400}{1600}$, de'quali i numeratori sono uguali, e sono, il primo, il prodotto di 5 moltiplicato per 80, e il secondo il quadrato di 20.

321. Dal qual teorema immediatamente se ne deduce, che il quarto termine di ogni proporzione discreta è il quoto, che si ha dividendo per il primo il prodotto del secondo moltiplicato per il terzo, e che di ogni proporzione continua il terzo termine è il quoto del quadrato del secondo diviso per il primo; ed il secondo termine la radice quadrata del prodotto del primo moltiplicato per il terzo. In fatti essendo nella proporzione discreta $8 : 2 = 28 : 7$, 56, prodotto di 2 moltiplicato per 28, uguale al prodotto di 8 moltiplicato per 7; sarà 7 il quoto di 56 diviso per 8: ed essendo nella proporzione continua $6 : 18 = 18 : 54$, 324 quadrato di 18, uguale al prodotto di 6 moltiplicato per 54; sarà 54 il quoto di 324 diviso per 6, e 18 la radice quadrata del prodotto di 6 moltiplicato per 54.

## CAPITOLO V.

*Dei Problemi, che con il calcolo Aritmetico si risolvono.*

322. La necessità di determinare alcune questioni, che tutto giorno accadono nella vita civile, e la vaghezza di determinarne altre utili ben-

bensì, ma non neceſſarie, ha indotto gli Aritmetici ad applicarvi il calcolo Aritmetico. Quattro ſono le regole, di cui comunemente eſſi ſi ſervono per la ſoluzione di ſiffatte queſtioni, delle quali la prima la dicono *Regola di Proporzione*, la ſeconda di *Società*, la terza di *Allegazione*, e la quarta del *Falſo ſemplice*, e *doppia*. Di queſte la prima n'è la principale, ed è quella da cui tutte le altre dipendono; poichè eſſe altro non ſono, che varie applicazioni della regola di proporzione: della quale quattro ne ſono le parti, due, che riguardano la proporzione ſemplice, una diretta, e l'altra reciproca, ed altre due che riguardano la compoſta, diretta ancora, e reciproca.

## §. I.

*Della Regola di Proporzione ſemplice, diretta, e reciproca.*

323. L'Operazione, con cui ſi determina il quarto termine di una propoſizione, della quale ne ſon noti gli altri tre, diceſi *Regola di Proporzione*, che pei tre termini noti diceſi ancora *Regola del tre*, e *Regola aurea* per la ſua grandiſſima utilità. Ella è diretta ſe la ragione del terzo al quarto termine è uguale alla ragion diretta del primo al ſecondo: e all'oppoſto reciproca, s'è uguale alla reciproca di quella.

324. Si riſolvono colla regola di proporzione ſemplice que' problemi, ne' quali ſi deve determinare una grandezza, a cui una data abbia una data ragione; de' termini della quale l'antecedente è la grandezza, che con alcune condizioni ha prodotto la grandezza data, ed il conſeguente quella, che colle medeſime condizioni della prima deve produrre la grandezza richieſta a quella omogenea; ond'è, che queſto conſeguente è ſempre la grandezza, alla quale è anneſſa la queſtione. Perlocchè egli è facile il conoſcere ſe la proporzione ſia diretta, o reciproca, prendendo per ſecondo termine la grandezza, alla quale è anneſſa la queſtione, e

per

per primo la sua omogenea; se il terzo termine dev' essere maggiore, uguale, o minore del quarto, secondo che il primo è maggiore, uguale, o minore del secondo, la ragione del terzo al quarto dev' essere uguale a quella del primo al secondo; e perciò la proporzione diretta: se poi il terzo termine debba esser minore, uguale, o maggiore del quarto, secondo che il primo è maggiore, uguale, o minore del secondo, allora la ragione del terzo al quarto dev' essere uguale a quella del secondo al primo, e perciò la proporzione reciproca.

325. Dall' essersi dimostrato, che il quarto termine di una proporzione discreta è uguale al quoto, che si ha dividendo per il primo termine il prodotto del secondo moltiplicato per il terzo; facilmente se ne deduce, che dandosi ai tre termini noti l' espressata situazione; si determini il quarto nella proporzione diretta, con dividere per il primo il prodotto del secondo moltiplicato per il terzo, e nella proporzione reciproca, con dividere per il secondo il prodotto del primo, moltiplicato per il terzo.

326. Debbasi adunque determinare quanto sia l' avere di tredici giorni di un Reggimento, al quale in un mese corrispondono 8372 ducati. Delle tre grandezze note in questo problema, sono omogenee i tredici giorni, ed il mese, ch' equivale a giorni trenta: il quesito è annesso ai tredeci giorni, poichè l' avere di questo tempo è quello, che dee determinarsi. Si prendano i tredici giorni per secondo termine, i trenta per primo, e gli 8372 ducati per terzo. Poichè gli averi di un Reggimento per un dato tempo sono maggiori, uguali, o minori degli averi del medesimo Reggimento per un altro tempo, secondo che il primo tempo è maggiore, uguale, o minore dell' altro, perciò il terzo degli espressati termini dev' essere maggiore, uguale, o minore del quarto, secondo che il primo è maggiore, uguale, o minore del secondo. Dunque la proporzione è diretta (324); e l' ave-
re

re richiesto è 3627 ducati, e $\frac{26}{30}$, uguale a 3627 ducati, 8 carlini, 6 grana, ed 8 cavalli, quoto del prodotto di 8372 moltiplicato per 13, diviso per 30.

327. Debbasi inoltre determinare quanto sia la gratificazione di un mese per una Compagnia di 72. soldati, essendo quella di 43 soldati 10 ducati, e 74 grana. Delle tre grandezze note sono omogenee li 72, e i 43 soldati: il quesito è annesso ai 72 soldati; poichè la gratificazione, che corrisponde a questi si deve determinare. Si prendano per secondo termine li 72 soldati, i 43 per primo, e i 10 ducati, e 74 grana per terzo. Poichè la gratificazione di una Compagnia è maggiore, uguale, o minore della gratificazione di un' altra, secondo che il numero de' soldati, che compongono la prima, è maggiore, uguale, o minore del numero de' soldati, che compongono l'altra: perciò il terzo degli espressati termini dev' essere maggiore, uguale, o minore del quarto, secondo che il primo è maggiore, uguale, o minore del secondo. Dunque la proporzione è diretta (324); e la gratificazione richiesta è 17 ducati, 9 carl. 8 grana, e $\frac{16}{43}$, quoto del prodotto di 10 ducati, e 74 grana moltiplicati per 72, diviso per 43.

328. Si debba determinare quante canne di un panno largo 4 palmi, e mezzo vi necessitano per il vestuario di un Reggimento, che di un panno largo 5 palmi ce ne ha impiegate 1732. Delle tre grandezze note sono omogenee le due larghezze 4 palmi, e mezzo, e cinque palmi: il quesito è annesso alla larghezza di 4 palmi, e mezzo; poichè la lunghezza del panno di questa larghezza si deve determinare. Si prendano per secondo termine la larghezza di 4 palmi, e $\frac{1}{2}$, per primo la larghezza di 5 palmi, e per terzo la lunghezza di palmi 1732. Poichè la lunghezza di un panno, che necessita per un vestuario, è minore, uguale, o maggiore della lunghezza di un altro, che s' impiega per lo stesso vestuario, secondo che la larghezza del pri-

primo è maggiore, uguale, o minore della larghezza dell' altro; perciò dei tre espressati termini il terzo dev' essere minore, uguale, o maggiore del quarto, secondo che il primo è maggiore, uguale, o minore del secondo. Dunque la proporzione è reciproca (324), e la lunghezza richiesta è 1924 palmi, e $\frac{4}{9}$, uguale a 1924 palmi, 5 oncie, e 3 minuti $\frac{1}{3}$, quoto del prodotto di 1732 moltiplicato per 5, diviso per $4\frac{1}{2}$.

329. Debbasi finalmente determinare quanti giorni si possa alimentare una guarnigione di 1783 soldati colle provvisioni, che ne alimenterebbero 857 per 82 giorni. Delle tre grandezze note sono omogenee i 1783, e gli 857 soldati: il quesito è annesso ai 1783 soldati; poichè si deve determinare il tempo, che questi possono alimentarsi. Si prendano per secondo termine i 1783 soldati, per primo gli 857 soldati, e per terzo gli 82 giorni. Poichè il tempo, che con una quantità di viveri si può alimentare un numero di uomini, è minore, uguale, o maggiore del tempo, che colla stessa quantità di viveri si può alimentare un altro numero di uomini, secondo che il primo numero di uomini è maggiore, uguale, o minore dell' altro; perciò dei tre espressati termini il terzo dev' essere minore, uguale, o maggiore del quarto, secondo che il primo è maggiore, uguale, o minore del secondo. Dunque la proporzione è reciproca (324), ed il tempo richiesto è 39 giorni, e $\frac{1137}{1783}$, uguale a 39 gio. 15 ore, 18' 2'' $\frac{1294}{1783}$, quoto del prodotto di 857 moltiplicato per 32, diviso per 1783.

§. II.

## §. II.

### *Della Regola di Proporzione composta, diretta, e reciproca.*

330. L'Operazione, colla quale si determina una grandezza, a cui una data sia in ragion composta di più date ragioni, dicesi proporzione *composta*. Ella è diretta, o reciproca, secondochè le ragioni componenti sono tutte le dirette delle date, o alcune, di alcune di esse sono reciproche.

331. In ogni problema, che si risolve colla regola di proporzione composta, gli antecedenti delle ragioni date sono sempre le condizioni, colle quali si è prodotta la data grandezza, e i conseguenti, le condizioni, colle quali si deve produrre la grandezza richiesta, che deve essere omogenea alla data. Quindi è, che se i termini delle ragioni date si prendano per primi termini di altrettante proporzioni semplici, delle quali il terzo termine della prima sia la grandezza data, della seconda il quarto proporzionale della prima, della terza il quarto proporzionale della seconda, e così successivamente delle altre; attribuendosi alli secondi termini le medesime condizioni, colle quali i primi hanno prodotti li terzi; l'ultimo quarto proporzionale sarà la grandezza richiesta, a cui la grandezza data sarà in ragion composta delle ragioni, che tutti i terzi termini di queste proporzioni hanno alli loro quarti; e perciò le componenti saranno tutte le dirette delle date, se le proporzioni sono tutte dirette, e alcune di esse saranno di quelle reciproche, se delle proporzioni alcune sono reciproche.

332. In fatti esprimano A, B, C, D le condizioni, colle quali si è prodotta la grandezza L, ed E, F, G, H quelle, colle quali si deve produrre la grandezza richiesta ad L omogenea: saranno

dunque le ragioni di A : E, di B : F, di C : G, e di D : H le date.

$$\begin{array}{l} A : E = L : R \\ B : F = R : M \\ C : G = M : N \\ D : H = N : Q \end{array}$$

Si prendano A, ed E per primi termini, ed L per terzo, e si attribuiscano ad E le condizioni B, C, D; colle quali A ha prodotta L: si avrà una proporzione semplice diretta, o reciproca, il di cui quarto termine R, sarà prodotto da E, colle condizioni B, C, D (324), ovvero da B, colle condizioni E, C, D; le quali se si attribuiscano ad F, e si prenda R per terzo termine, si avrà un' altra proporzione semplice diretta, o reciproca, della quale il quarto termine M sarà prodotto da F, colle condizioni E, C, D, ovvero da C colle condizioni E, F, D, che attribuite a G, se si prenda M per terzo termine, si avrà un' altra proporzione semplice diretta, o reciproca, di cui il quarto termine N verrà prodotto da G, colle condizioni E, F, D, ovvero da D, colle condizioni E, F, G; le quali attribuite ad H, se si prenda N per terzo termine, si avrà una proporzione semplice diretta, o reciproca, della quale il quarto termine Q sarà prodotto da H, colle condizioni E, F, G; e perchè omogeneo ad N, N ad M, M ad R, R ad L; sarà omogeneo ad L; e perciò la grandezza richiesta. Poichè L, R, M, N, Q sono grandezze omogenee, la ragione di L : Q è composta dalle ragioni di L : R, di R : M, di M : N, di N : Q (313): ma queste nelle proporzioni dirette sono simili alle dirette delle date, e nelle reciproche alle reciproche di esse (323): dunque la grandezza data è alla richiesta in ragione composta delle dirette delle ragioni date, se le proporzioni sono tutte dirette; ed in ragion composta delle dirette di alcune delle date, e delle reciproche delle altre, se delle proporzioni alcune sono dirette, e le al-

le altre reciproche. Perlocchè la grandezza richiesta è quarta proporzionale dopo il prodotto degli antecedenti delle ragioni date, dei conseguenti, e la grandezza data, se le componenti sono tutte le dirette delle date; ed è quarta proporzionale dopo il prodotto degli antecedenti delle dirette, e dei conseguenti delle reciproche; il prodotto dei conseguenti delle dirette, e gli antecedenti delle reciproche; e la grandezza data; se delle componenti alcune sono le dirette di alcune delle ragioni date, ed altre le reciproche delle rimanenti.

333. Suppongasi; che sette Squadroni di Cavalleria, de' quali ciascheduno ha sessanta Uomini di fronte, occupino 1680 piedi, e vogliasi determinare il numero de' piedi, che devono occupare nove Battaglioni di Fanteria, de' quali ciascheduno ha 108 Uomini di fronte; supposto, che il numero de' piedi, che occupa un Soldato di Cavalleria sia a quello di un Soldato di Fanteria come 5 : 2. Si paragonino come antecedenti le condizioni, colle quali si sono determinati i 1680 piedi, a quelle colle quali si devono determinare i piedi richiesti, e si avranno le ragioni date, che sono di 7 : 9, di 60 : 108, e di 5 : 2, che si dispongono nel modo seguente

$$\begin{array}{l} 7 : 9 = 1680 \\ 60 : 108 = \\ 5 : 2 = \end{array}$$

Poichè sette Squadroni, ciascheduno di sessanta Uomini di fronte, de' quali ogn' uno ha lo spazio cinque: nove Battaglioni, anche di 60 Uomini di fronte, collo spazio cinque per ogni Uomo, e 1680 piedi costituiscono una proporzione semplice diretta, della quale il quarto proporzionale è il numero de' piedi, che occupano nove Battaglioni di 60 Uomini di fronte collo spazio cinque (324): 60 Uomini di fronte in nove Battaglioni, collo spazio cinque, 108 Uomini di fronte in nove Battaglioni collo spazio cinque, e il quarto proporzionale della prima proporzione, costituiscono un' altra pro-

porzione ſemplice diretta, della quale il quarto proporzionale è il numero de' piedi, che occupano nove Battaglioni di 108 Uomini di fronte collo ſpazio cinque: e lo ſpazio cinque di ciaſchedun' Uomo di nove Battaglioni, di 108 Uomini di fronte, lo ſpazio due di ciaſchedun Uomo di nove Battaglioni di 108 Uomini di fronte, e il quarto proporzionale dell'antecedente proporzione, coſtituiſcono una proporzione ſemplice diretta, della quale il quarto proporzionale è il numero de' piedi, che occupano nove Battaglioni di 108 Uomini di fronte, collo ſpazio due per ogni Uomo: ch'è il numero de' piedi richieſto. Dunque l'eſpreſſate proporzioni ſemplici ſono tutte dirette, perciò il numero de' piedi dato è al richieſto in ragion compoſta delle dirette delle ragioni date (332); ed è 1555 piedi, due pollici, quattro linee, e otto punti; quarto proporzionale dopo 2100, prodotto di 60 moltiplicato per 5, e per ſette: di 1944, prodotto di 108 moltiplicato per due, e per nove, e di 1680 numero dato de' piedi.

334. Suppongaſi, che diciaſſette cannoni facciano in nove giorni, ſparando cinque ore per giorno, 3907 tiri, e vogliaſi determinare il numero dei tiri, che devono fare quattordici Cannoni in ſette giorni, ſparando quattr'ore per giorno: eſſendo però la velocità, colla quale ſono ſerviti li primi, a quella, colla quale ſono ſerviti i ſecondi, nella ragione di 3 : 5.

Si paragonino come antecedenti le condizioni, colle quali ſi è determinato il numero de' tiri 3907, a quelle colle quali ſi deve determinare il numero de' tiri richieſto; e ſi avranno le ragioni date, che ſono di 17 : 14, di 9 : 7, di 5 : 4, e di 3 : 5, le quali ſi diſpongano nel modo ſeguente:

$$\begin{aligned} 17 &: 14 = 3907 \\ 9 &: 7 = \\ 5 &: 4 = \\ 3 &: 5 = \end{aligned}$$

Poi-

Poichè lo ſparo di diciaſſette Cannoni in nove giorni, a cinque ore per giorno, ſerviti colla velocità tre; lo ſparo di quattordici Cannoni anche in nove giorni, a cinque ore per giorno, ſerviti colla velocità tre, e 3907 tiri coſtituiſcono una proporzione ſemplice diretta, della quale il quarto proporzionale è il numero dei tiri, che fanno 14 Cannoni in nove giorni, ſparando cinque ore per giorno, ſerviti colla velocità tre (324): lo ſparo in nove giorni di 14 Cannoni, a cinque ore per giorno, ſerviti colla velocità tre; quello in ſette giorni di 14 Cannoni, a cinque ore per giorno, ſerviti colla velocità tre, e il quarto proporzionale della prima proporzione, coſtituiſcono una proporzione ſemplice diretta, della quale il quarto proporzionale è il numero de' tiri, che fanno 14 Cannoni in ſette giorni; ſparando cinque ore per giorno, ſerviti colla velocità tre: lo ſparo di cinque ore per giorno di 14 Cannoni, in ſette giorni, ſerviti colla velocità tre; quello di quattr' ore per giorno di 14 Cannoni in ſette giorni, ſerviti colla velocità tre, e il quarto proporzionale della ſeconda proporzione, coſtituiſcono una proporzione ſemplice diretta, della quale il quarto proporzionale è il numero de' tiri, che fanno 14 Cannoni in ſette giorni; ſparando quattr'ore per giorno, ſerviti colla velocità tre: lo ſparo colla velocità tre, di 14 Cannoni in ſette giorni, a quattr' ore per giorno; quello colla velocità cinque di 14 Cannoni, in ſette giorni, a quattr' ore per giorno, e il quarto proporzionale dell' antecedente proporzione, coſtituiſcono un'altra proporzione ſemplice diretta, della quale il quarto proporzionale è il numero de' tiri, che fanno 14 Cannoni in ſette giorni, ſparando quattr' ore per giorno, ſerviti colla velocità cinque; ch' è il numero dei tiri richieſto. Dunque l' eſpreſſate proporzioni ſemplici ſono tutte dirette; per lo che il numero de' tiri dato è al richieſto in ragion compoſta delle dirette delle ragioni date (332); ed è 3336 $\frac{120}{459}$, quarto propor-

 zio-

zionale dopo 2295, prodotto di 17 moltiplicato per nove, per cinque, e per tre; di 1960, prodotto di 14 moltiplicato per sette, per quattro, e per cinque; e di 3907 numero dato dei tiri.

335. Si supponga inoltre, che sette Battaglioni di 336 Uomini per ciascheduno, abbiano dato un distaccamento di 287 Uomini, per 150 giorni; e si debba determinare quanti giorni deve rimanere un distaccamento di 315 Uomini, dato da tre Battaglioni ciascheduno di 700 Uomini, affinchè s'uguagli coi primi il torno de' distaccamenti.

Si paragonino come antecedenti le condizioni, colle quali si sono determinati i 150 giorni, a quelle, colle quali si devono determinare i giorni richiesti; e si avranno le ragioni date, che sono di 7: 3, di 336: 700, e di 287: 315, che si dispongono nel modo seguente:

$$7 : 3 = 150 :$$
$$336 : 700 =$$
$$287 : 315 =$$

Poichè sette Battaglioni, ciascheduno di 336 Uomini, che diano un distaccamento di 287 uomini; tre Battaglioni anche di 336 uomini per ciascheduno, che diano un distaccamento di 287 uomini, e 150 giorni, costituiscono una proporzione semplice diretta, della quale il quarto proporzionale è il numero dei giorni, pei quali tre Battaglioni, ciascheduno di 336 uomini, devono dare un distaccamento di 287 uomini (324): 336 uomini per ciascheduno di tre Battaglioni, che diano un distaccamento di 287 uomini; 700 uomini per ciascheduno di tre Battaglioni; che diano un distaccamento di 287 uomini, e il quarto proporzionale della prima proporzione, costituiscono una proporzione semplice diretta, della quale il quarto proporzionale è il numero dei giorni, pei quali tre Battaglioni, ciascheduno di 700 uomini, devono dare un distaccamento di 287 uomini: un distaccamento di 287 uomini, dato da tre Battaglioni,

ni, ciascheduno di 700 uomini; un distaccamento di 315 uomini, dato da tre Battaglioni, ciascheduno di 700 uomini, e il quarto proporzionale dell'antecedente proporzione, costituiscono una proporzione semplice reciproca, della quale il quarto proporzionale è il numero dei giorni, per li quali tre Battaglioni, ciascheduno di 700 uomini, devono dare un distaccamento di 315 uomini; ch'è il numero dei giorni richiesto (324). Dunque dell'espressate proporzioni semplici le due prime sono dirette, e l'ultima reciproca: perlocchè il numero de' giorni dato è al richiesto in ragion composta delle dirette delle due prime, e della reciproca dell'ultima delle ragioni date (332); ed è 122 giorni, 34 minuti primi, 17'' 8''' $\frac{1}{7}$; quarto proporzionale dopo 740880 prodotto di 7 moltiplicato per 336, e per 315; di 602700 prodotto di 3 moltiplicato per 700, e per 287; e di 150 numero dato dei giorni.

336. Finalmente si supponga, che 830 uomini abbiano scavato 2747 piedi cubici di terreno, in 268 giorni, lavorando 8 ore per giorno; e che si debba determinare il numero de' giorni, che 752 uomini impiegheranno per iscavare 3492 piedi cubici di terreno, lavorando 6 ore per ogni giorno; nella supposizione, che la durezza del primo terreno sia a quella del secondo, come 5 : 7, e la forza ed attività de' primi uomini sia a quella de' secondi come 6 : 5. Si paragonino come antecedenti le condizioni, colle quali si sono determinati li 268 giorni, a quelle colle quali si devono determinare i giorni richiesti; e si avranno le ragioni date, che sono di 830 : 752, di 2747 : 3492, di 8 : 6, di 5 : 7, e di 6 : 5; che si dispongono nel modo seguente:

$$\begin{array}{rl} 830 : 752 = & 268 \\ 2747 : 3492 = & \\ 8 : 6 = & \\ 5 : 7 = & \\ 6 : 5 = & \end{array}$$

Poichè 830 uomini, che scavino 2747 piedi cubici di terreno della durezza 5, lavorando ott' ore per giorno, colla forza, e attività sei; 752 uomini, che similmente scavino 2747 piedi cubici di terreno della durezza 5, lavorando ott' ore per giorno, colla forza, e attività sei; e 268 giorni, costituiscono una proporzione semplice reciproca, della quale il quarto proporzionale è il numero dei giorni, che 752 uomini devono impiegare in iscavare 2747 piedi cubici di terreno della durezza cinque, lavorando ott' ore per giorno, colla forza, e attività sei (324): 2747 piedi cubici di terreno della durezza cinque, scavati da 752 uomini, lavorando ott' ore per giorno, colla forza, e attività sei; 3492 piedi cubici di terreno della durezza cinque, da scavarsi da 752 uomini, che lavorino ott' ore per giorno, colla forza, e attività sei; e il quarto proporzionale della prima proporzione, costituiscono una proporzione semplice diretta, della quale il quarto proporzionale è il numero dei giorni, che devono impiegare in iscavare 3492 piedi cubici di terreno della durezza cinque, lavorando ott' ore per giorno 752 uomini, colla forza, e attività sei (324): il lavoro di ott' ore per giorno, colla forza, e attività sei, di 752 uomini in iscavare 3492 piedi cubici di terreno della durezza cinque: il lavoro di sei ore per giorno, colla forza, e attività sei, di 752 uomini, in iscavare 3492 piedi cubici di terreno della durezza cinque, e il quarto proporzionale della seconda proporzione, costituiscono una proporzione semplice reciproca, della quale il quarto proporzionale è il numero de' giorni, che lavorando sei ore per giorno, colla forza, e attività sei, devono impiegare 752 uomini in iscavare 3492 piedi cubici di terreno della durezza cinque: la durezza cinque di un terreno, del quale se ne scavino 3492 piedi cubici, da 752 uomini, che lavorino sei ore per giorno, colla forza, e attività sei; la durezza sette di un terreno, del quale ancora se ne scavino 3492 piedi cubici, da 752 uomini, che lavorino sei ore per giorno, colla for-

forza, e attività sei; e il quarto proporzionale della terza proporzione, costituiscono una proporzione semplice diretta, della quale il quarto proporzionale è il numero dei giorni, che nello scavare di un terreno della durezza sette, 3492 piedi cubici, debbono impiegare 752 uomini, che lavorino sei ore per giorno, colla forza e attività sei: la forza, e attività sei, con cui lavorano sei ore per giorno 752 uomini, in iscavare 3492 piedi cubici di terreno della durezza sette; la forza, e attività cinque, colla quale lavorano sei ore per giorno 752 uomini, in iscavare 3492 piedi cubici di terreno della durezza sette; e il quarto proporzionale dell' antecedente proporzione, costituiscono una proporzione semplice reciproca, della quale il quarto proporzionale è il numero dei giorni, che lavorando colla forza, e attività cinque, sei ore per giorno, 752 uomini, devono impiegare in iscavare 3492 piedi cubici di terreno della durezza sette; ch' è il numero de' giorni richiesto. Dunque dell' espressate proporzioni semplici, la prima, la terza, e la quinta sono reciproche, e le due rimanenti dirette: per lo che il numero de' giorni dato è al richiesto in ragion composta delle reciproche della prima, terza, e quinta, e delle dirette della seconda, e quarta delle ragioni date (332), ed è 842 giorni, sei ore, 49', 12'' $\frac{752519}{1549308}$, quarto proporzionale dopo di 309861600, prodotto di 752 moltiplicato per 2747, per 6, per 5, e per 5; e di 973848960, prodotto di 830 moltiplicato per 3492, per 8, per 7, e per 6; e di 268 numero dato dei giorni.

## §. III.

### *Della Regola di Società semplice, e composta.*

337. Dicesi Regola di Società, l'operazione colla quale data la somma di più grandezze, le di cui ragioni sieno rispettivamente simili a quelle di altrettante grandezze date, ovvero alle com-

poste dalle ragioni dei rispettivi termini di due, o più serie, ciascheduna di altrettante grandezze; si determina ogn'una di esse. Nel primo caso si dice *semplice*, nel secondo *composta*. Ella ha derivato il suo nome, dall'uso grandissimo, che ne fanno le Società de' Mercanti.

338. Nei problemi, che si risolvono colla regola di Società, ciascheduna delle grandezze, delle quali è data la somma, vien prodotta, colle medesime condizioni, da ciascheduna di altrettante grandezze date; ovvero da due, o più date grandezze, che costituiscano i termini rispettivi di due, o più serie, ogn'una di altrettante grandezze; perciò nel primo caso le loro ragioni sono rispettivamente simili a quelle delle grandezze date (324), e nel secondo alle composte dalle ragioni dei rispettivi termini delle date serie di grandezze (331). Dunque le grandezze, delle quali è data la somma, sono, nel primo caso, ordinatamente proporzionali alle grandezze date, e nel secondo, alli prodotti dei termini rispettivi delle date serie (306); per locchè la somma delle grandezze date, o de' prodotti dei rispettivi termini delle date serie, è alla somma data, come ogn'una di esse grandezze, o prodotti, alla rispettiva delle grandezze richieste (319). Quindi è, che per determinare le grandezze richieste si devono istituire tante proporzioni semplici, quante esse sono, delle quali il primo termine è la somma delle grandezze date, o de' prodotti de' rispettivi termini delle date serie; il secondo la data somma, e il terzo successivamente ogn'una delle grandezze date, o de' riferiti prodotti.

339. Si supponga, che vi sieno di guarnigione in una Piazza quattro Reggimenti, de' quali il primo sia di 1362 uomini, il secondo di 1235, il terzo di 982, e il quarto di 736; i quali debbano dare 756 uomini di guardia in ogni giorno; e si debba determinare il numero d'uomini, che deve somministrare ogn'uno di essi.

Li numeri d'uomini, che devono somministrare i ri-

i riferiti Reggimenti, essendo tutte le altre circostanze le stesse, sono tra se come i numeri degli uomini, che li compongono; onde sono ad essi ordinatamente proporzionali; e perciò 4315 somma dei numeri degli uomini, che compongono i Reggimenti, è a 756 somma de' numeri richiesti, come ciascheduno de' primi a quello de' secondi, che li corrisponde (319);

$$4315 : 756 = 1362 : 238 \tfrac{2702}{4315}$$
$$4315 : 756 = 1235 : 216 \tfrac{1620}{4315}$$
$$4315 : 756 = 982 : 172 \tfrac{212}{4315}$$
$$4315 : 756 = 736 : 128 \tfrac{4096}{4315}$$

Perlocchè il numero degli uomini, che deve somministrare il primo Reggimento, è $238 \tfrac{2702}{4315}$, quarto proporzionale dopo 4315, 756, e 1362 numero degli uomini, che compongono il primo Reggimento: quello, che deve somministrare il secondo, è $216 \tfrac{1620}{4315}$, quarto proporzionale dopo 4315, 756, e 1235 numero degli uomini, che compongono il secondo Reggimento: quello, che deve somministrare il terzo, è $172 \tfrac{212}{4315}$, quarto proporzionale dodo 4315, 756, e 982 numero degli uomini, che compongono il terzo Reggimento; e quello, che deve somministrare il quarto, è $128 \tfrac{4096}{4315}$, quarto proporzionale dopo 4315, 756, e 736 numero degli uomini, che compongono il quarto Reggimento.

340. Suppongasi, che gli Uffiziali di un Reggimento d'Infanteria debbano pagare 896 ducati, ogn'uno a proporzione del suo soldo, che si supponga essere in ogni mese, quello del Colonnello 96 ducati, del Tenente Colonnello 72, del Maggiore 45, di tutti li Capitani 468, degli Ajutanti Maggiori 44, di tutti i Tenenti 342, e di tutti gli Alfieri 270: si debba determinare quanto deve pagare ciascheduno di essi. I numeri de' ducati,

ti, che devono pagare ogn' uno de' riferiti Uffiziali, sono tra sè come i numeri dei ducati, che compongono i loro soldi, poichè così si è supposto: onde sono ad essi ordinatamente proporzionali; e perciò 1337 somma de' numeri de' ducati, che compongono i soldi, è a 896 somma dei numeri dei ducati, che si devono pagare, come ciascheduno de' primi a quello de' secondi, che li corrisponde (319).

$$1337 : 896 = 96 : 64.\ 3.\ 3.\ 6\tfrac{126}{1337}$$
$$1337 : 896 = 72 : 48.\ 2.\ 5.\ 1\tfrac{763}{1337}$$
$$1337 : 896 = 45 : 30.\ 1.\ 5.\ 8\tfrac{644}{1337}$$
$$1337 : 896 = 468 : 313.\ 6.\ 3.\ 4\tfrac{280}{1337}$$
$$1337 : 896 = 44 : 29.\ 4.\ 8.\ 8\tfrac{392}{1337}$$
$$1337 : 896 = 342 : 229.\ 1.\ 9.\ 4\tfrac{686}{1337}$$
$$1337 : 896 = 270 : 180.\ 9.\ 4.\ 2\tfrac{1190}{1337}$$

Perlocchè il numero de' ducati, che deve pagare il Colonnello, è 64. 3. 3. 6 $\frac{126}{1337}$, quarto proporzionale dopo 1337, 896, e 96 numero dei ducati, che compongono il soldo del Colonnello; quello, che deve pagare il Tenente Colonnello, è 48. 2. 5. 1. $\frac{763}{1337}$, quarto proporzionale dopo 1337, 896, e 72 numero de' ducati, che compongono il soldo del Tenente Colonnello; quello che deve pagare il Maggiore, è 30. 1. 5. 8 $\frac{644}{1337}$, quarto proporzionale dopo 1337, 896, e 45 numero de' ducati, che compongono il soldo del Maggiore; quello che devono pagare tutti i Capitani, è 313. 6. 3. 4 $\frac{280}{1337}$, quarto proporzionale dopo 1337, 896; e 468 numero dei ducati, che compongono i soldi di tutti i Capitani; quello, che devono pagare i due Ajutanti Maggiori, è 29. 4. 8. 8 $\frac{392}{1337}$, quarto proporzionale dopo 1337, 896, e 44 numero dei ducati,

cati, che compongono i soldi dei due Ajutanti Maggiori; quello, che devono pagare tutti i Tenenti, è 229. 1. 9. 4 $\frac{616}{1337}$, quarto proporzionale dopo 1337, 896, e 342 numero dei ducati, che compongono i soldi di tutti li Tenenti; e quello finalmente, che devono pagare tutti gli Alfieri, è 180. 9. 4. 2 $\frac{1190}{1337}$, quarto proporzionale dopo 1337, 896, e 270 numero dei ducati, che compongono i soldi di tutti gli Alfieri.

341. Suppongasi, che 18632 ducati si debbano distribuire a quattro Reggimenti, in guisa che il secondo abbia i due terzi del primo, il terzo i cinque settimi del secondo, ed il quarto i due quinti del terzo.

Secondo si è supposto, il numero dei ducati, che appartiene al primo Reggimento, è a quello, che appartiene al secondo come $1 : \frac{2}{3}$, quello, che appartiene al secondo, è a quello che appartiene al terzo come $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ di $\frac{2}{3}$, ovvero come $\frac{2}{3}, \frac{10}{21}$; e quello che appartiene al terzo, è a quello che appartiene al quarto come $\frac{5}{7}$ di $\frac{2}{3} : \frac{2}{5}$ di $\frac{5}{7}$ di $\frac{2}{3}$, ovvero come $\frac{10}{21} : \frac{20}{105}$; e riducendo tutti i termini di queste ragioni a rotti, che abbiano 105 per comune denominatore; si avranno i rotti $\frac{105}{105}$, $\frac{70}{105}$, $\frac{50}{105}$, e $\frac{20}{705}$; i quali sono tra se come i numeratori 105, 70, 50, e 20 (307); e perciò a questi numeratori sono ordinatamente proporzionali i numeri dei ducati, che appartengono ai riferiti quattro Reggimenti: onde 245 somma dei numeratori è a 18632, somma dei numeri dei ducati, che appartengono ai quattro Reggimenti, come ciascheduno dei primi a quello de' secondi, che li corrisponde (319).

$245 : 18632 = 105 : 7985.\ 1.\ 4.\ 3\ \frac{105}{245}$

$245 : 18632 = 70 : 5323.\ 4.\ 2.\ 10\ \frac{70}{245}$

$245 : 18632 = 50 : 3802.\ 4.\ 4.\ 10\ \frac{190}{245}$

$245 : 18632 = 20 : 1520.\ 9.\ 7.\ 11\ \frac{225}{245}$

Perlocchè il numero dei ducati, che appartiene al primo Reggimento, è 7985. 1. 4. 3 $\frac{105}{245}$, quarto proporzionale dopo 245, 18632, e 105; quello, il quale appartiene al secondo, è 5323. 4. 2. 10 $\frac{70}{245}$, quarto proporzionale dopo 245, 18632, e 70; quello, che appartiene al terzo, è 3802. 4. 4. 10 $\frac{190}{245}$, quarto proporzionale dopo 245, 18632, e 50; e quello finalmente, che appartiene al quarto, è 1520. 9. 7. 11 $\frac{225}{245}$, quarto proporzionale dopo 245, 18632, e 20.

342. Si supponga, che un distaccamento di 1828 Uomini si debba distribuire in quattro posti, in guisa che nel secondo ve ne sia il doppio del primo, e 12 uomini di più, nel terzo il triplo del secondo, e 16 uomini di meno, e nel quarto il doppio del secondo, con 50 uomini di meno. Essendo, siccome si è supposto, il numero degli uomini del secondo posto uguale al doppio di quello del primo, e a 12 uomini di più; e quello del terzo uguale al triplo di quello del secondo, e a 16 uomini di meno, vale a dire al sestuplo del primo, e al triplo di 12 minorato di 16, cioè a 20; ed essendo il numero degli uomini del quarto posto uguale al doppio di quello del terzo, e a 50 uomini di meno; ch'è lo stesso del dudecuplo del primo, insieme col doppio di 20 minorato di 50, cioè minorato di 10; sarà il numero degli uomini del primo posto a quello del secondo minorato di 12, come 1 : 2; quello del secondo minorato di 12 a quello del terzo minorato di 20 come 2 : 6; e quello del terzo minorato di 20, a quello del quar-

quarto accresciuto di 10, come 6 : 12. Dunque i numeri richiesti così minorati, e accresciuti, sono ordinatamente proporzionali ai numeri 1, 2, 6, e 12; onde 21 somma di essi, è a 1806 numero degli uomini, che compongono il distaccamento da ripartire, minorato di 12, e 20, e accresciuto di 10, come ciascheduno degli espressati numeri a quello de' richiesti, che li corrisponde (319); minorato però il secondo di 12, il terzo di 20, ed accresciuto il quarto di 10.

| | |
|---|---|
| $21 : 1806 = 1.\ 86$ | $21 : 1806 = 2 : \begin{array}{r} 172 \\ 12 \\ \hline 184 \end{array}$ |
| $21 : 1806 = 6 : \begin{array}{r} 516 \\ 20 \\ \hline 536 \end{array}$ | $21 : 1806 = 12 : \begin{array}{r} 1032 \\ 10 \\ \hline 1022 \end{array}$ |

Perlocchè il numero degli uomini del primo posto è 86, quarto proporzionale dopo 21, 1806, ed 1; quello del secondo è 184 somma del quarto proporzionale dopo 21, 1806, e 2, e di 12; quello del terzo è 536, somma del quarto proporzionale dopo 21, 1806, e 6, e di 20; e quello finalmente del quarto è 1022, residuo, che si ha togliendo il 10 dal quarto proporzionale dopo 21, 1806, e 12.

343. Si supponga, che a 36 Sergenti, 72 Caporali, 54 Carabinieri, e 784 Soldati, si debbano distribuire 982 ducati, in guisa che la porzione di ogni Caporale sia i $\frac{5}{7}$ di quella di ogni Sergente; quella di ciascheduno Carabiniere gli $\frac{8}{9}$ di quella di ciaschedun Caporale, e quella di ciaschedun Soldato i $\frac{4}{5}$ di quella di ciaschedun Carabiniere.

Secondo si è supposto, la porzione di un Sergente è a quella di un Caporale come $1 : \frac{5}{7}$; quella di un Caporale è a quella di un Carabiniere come $\frac{5}{7} : \frac{8}{9}$ di $\frac{5}{7}$, ovvero come $\frac{5}{7} : \frac{40}{63}$; quella di un Cara-

rabiniere è a quella di un Soldato come $\frac{8}{9}$ di $\frac{5}{7}$ : $\frac{4}{5}$ di $\frac{8}{9}$ di $\frac{5}{7}$, ovvero come $\frac{40}{63}$ : $\frac{160}{315}$ ; e riducendo tutti i termini di queste ragioni a rotti, che abbiano 315 per comune denominatore; si avranno i rotti $\frac{315}{315}$, $\frac{225}{315}$, $\frac{200}{315}$, e $\frac{160}{315}$ ; i quali sono tra se come i numeratori 315, 225, 200, e 160 (307); onde a questi numeratori sono ordinatamente proporzionali le porzioni di un Sergente, di un Caporale, di un Carabiniere, e di un Soldato; e perciò le porzioni di 36 Sergenti, 72 Caporali, 54 Carabinieri, e 784 Soldati sono ordinatamente proporzionali a 11340, prodotto di 315 moltiplicato per 36; a 16200 prodotto di 225 moltiplicato per 72; a 10800, prodotto di 200 moltiplicato per 54; e a 125440, prodotto di 160 moltiplicato per 784 (338); perlocchè 163780 somma di questi prodotti, è a 982 somma delle riferite porzioni, come ciascheduno di essi prodotti alla corrispondente porzione (319).

$$163780 : 982 = 11340 : 67.\ 9.\ 9.\ 3\ \tfrac{82020}{163780}$$
$$163780 : 982 = 16200 : 97.\ 1.\ 3.\ 3.\ \tfrac{46980}{163780}$$
$$163780 : 982 = 10800 : 64.\ 7.\ 5.\ 6\ \tfrac{31320}{163780}$$
$$163780 : 982 = 125440 : 752.\ 1.\ 1.\ 11\ \tfrac{3460}{163780}$$

Dunque la porzione, che appartiene alli 36 Sergenti, è ducati 67. 9. 9. 3 $\frac{82020}{163780}$, quarto proporzionale dopo 163780, 982, e 11340; quella, che appartiene alli 72 Caporali, è 97. 1. 3. 3 $\frac{46980}{163780}$, quarto proporzionale dopo 163780, 982, e 16200; quella, che appartiene alli 54 Carabinieri, è 64. 7. 5. 6 $\frac{31320}{163780}$, quarto proporzionale dopo 163780, 982, e 10800; e finalmente quella, che appartiene alli 784 Soldati, è 752. 1. 1. 11 $\frac{3460}{163780}$, quarto proporzionale dopo 163780, 982, e 125440.

344. Finalmente si supponga, che si sieno impiegati

gati in un lavoro 5 Sergenti per 16 giorni, e 3 per 7; 19 Caporali per 12 giorni, e 16 per 11; 17 Carabinieri per 15 giorni, e 13 per 8; 192 Soldati per 17 giorni, e 125 per 6; alli quali si debbano distribuire per ricompenza delle loro fatiche, 2436 ducati: in guisachè la ricompenza del lavoro di un giorno del Caporale sia li $\frac{4}{5}$ di quella del Sergente; quella del Carabiniere i $\frac{6}{7}$ di quella del Caporale, e quella del Soldato gli $\frac{8}{9}$ di quella del Carabiniere.

Secondo si è supposto, la porzione di un giorno di un Sergente è a quella di un Caporale come $1 : \frac{4}{5}$: quella di un Caporale è a quella di un Carabiniere come $\frac{4}{5} : \frac{6}{7}$ di $\frac{4}{5}$, ovvero come $\frac{4}{5} : \frac{24}{35}$: quella di un Carabiniere è a quella di un Soldato come $\frac{6}{7}$ di $\frac{4}{5} : \frac{8}{9}$ di $\frac{6}{7}$ di $\frac{4}{5}$, ovvero come $\frac{24}{35} : \frac{192}{315}$: e riducendo tutti li termini di queste ragioni a rotti, che abbiano 315 per comune denominatore; si avranno i rotti $\frac{315}{315}$, $\frac{252}{315}$, $\frac{216}{315}$, e $\frac{192}{315}$; i quali sono tra se come i numeratori 315, 252, 216, e 192, (307): onde a questi numeratori sono ordinatamente proporzionali le porzioni di un giorno di un Sergente, di un Caporale, di un Carabiniere, e di un Soldato; e perciò le porzioni di 16, e 7 giorni, di 5, e 3 Sergenti; di 12, e 11 giorni, di 19, e 16 Caporali; di 15, ed 8 giorni, di 17, e 13 Carabinieri; di 17, e 6 giorni, di 192, e 125 Soldati; sono ordinatamente proporzionali a 25200, prodotto di 315 moltiplicato per 16, e per 5; a 6615 prodotto di 315 moltiplicato per 7, e per 3; a 57456 prodotto di 252 moltiplicato per 12, e per 19; a 44352 prodotto di 252 moltiplicato per 11, e per 16; a 55080 prodotto di 216 moltiplicato per 15, e per 17; a 22464 prodotto di 216 moltiplicato per 8, e per 13; a 626688 prodotto di 192 moltiplicato per 17, e per 192; e a 144000 prodotto di 192 moltiplicato per 6, e per 125 (338): per-



loc.

locchè 981855, somma di questi prodotti, è a 2436 somma delle riferite porzioni, come ciascheduno di essi prodotti alla porzione corrispondente (319).

$$981855 : 2436 = 25200 : 62.\ 5.\ 2.\ 1 \tfrac{968625}{981855}$$
$$981855 : 2436 = 6615 : 16.\ 4.\ 1.\ 2 \tfrac{315630}{981855}$$
$$981855 : 2436 = 57456 : 142.\ 5.\ 4.\ 11 \tfrac{244755}{981855}$$
$$981855 : 2436 = 44352 : 110.\ 0.\ 3.\ 9 \tfrac{722925}{981855}$$
$$981855 : 2436 = 55080 : 136.\ 6.\ 5.\ 5 \tfrac{363825}{981855}$$
$$981855 : 2436 = 22464 : 55.\ 7.\ 3.\ 4 \tfrac{302400}{981855}$$
$$981855 : 2436 = 626688 : 1554.\ 8.\ 2.\ 5 \tfrac{103005}{981855}$$
$$981855 : 2436 = 144000 : 357.\ 2.\ 6.\ 7 \tfrac{906255}{981855}$$

Dunque la porzione, che appartiene alli 5 Sergenti per il lavoro di 16 giorni, è ducati 62. 5. 2. 1 $\frac{968625}{981855}$, quarto proporzionale dopo 981855, 2436, e 25200: quella, che appartiene alli 3 Sergenti per il lavoro di 7 giorni, è 16. 4. 1. 2 $\frac{315610}{981855}$, quarto proporzionale dopo 981855, 2436, e 6615: quella, che appartiene alli 19 Caporali per il lavoro di 12 giorni è 142. 5. 4. 11 $\frac{244755}{981855}$, quarto proporzionale dopo 981855, 2436, e 57456: quella, che appartiene alli 16 Caporali per il lavoro di 11 giorni, è 110. 0. 3. 9 $\frac{722925}{981855}$, quarto proporzionale dopo 981855, 2436, e 44352: quella, che appartiene alli 17 Carabinieri per il lavoro di 15 giorni, è 136, 6, 5, 5 $\frac{363825}{981855}$, quarto proporzionale dopo 981855, 2436, e 55080: quella, che appartiene alli 13 Carabinieri per il lavoro di 8 giorni, è 55. 7. 3. 4 $\frac{302400}{981855}$, quarto proporzionale dopo 981855, 2436, e 22464: quella, che appartiene alli 192 Soldati per il lavoro di 17 giorni, è 1554. 8. 2. 5 $\frac{103005}{981855}$, quarto proporzionale dopo 981855, 2436, e 626688; e quel-

e quella finalmente, che appartiene alli 125 Soldati per il lavoro di 6 giorni, è 357. 2. 6. 7 $\frac{906225}{981855}$, quarto proporzionale dopo 981855, 2436, e 144000.

## §. IV.

### *Della Regola di Allegazione*.

345. L'Operazione, colla quale si determina quali parti di due, o più grandezze tra se differenti compongono, o devono comporre una data grandezza media tra esse, dicesi regola di *Allegazione*, ovvero delle misture.

346. Colla regola di Allegazione si risolvono quei problemi, ne' quali essendo date due, o più grandezze differenti di peso, o di prezzo, si deve con esse formarne un' altra di un peso, o prezzo medio a loro: ovvero essendo data una grandezza di un peso, o prezzo medio a quello di due, o più grandezze, che la compongono, e sono di pesi, o prezzi differenti; si devono determinare le porzioni di esse grandezze, che l' hanno composta. Quindi è, che i pesi, o prezzi delle parti delle grandezze minori, che devono comporre, o compongono la grandezza media, devono essere di tanto minori de' pesi, o prezzi delle parti simili di essa grandezza media, di quanto i pesi, o prezzi delle parti delle grandezze maggiori, che la devono comporre, o la compongono, sono maggiori delle parti simili della grandezza media medesima: affinchè essendo uguali gli eccessi, e difetti delli pesi, o prezzi delle parti componenti, riguardo alli pesi, o prezzi delle parti simili della grandezza da comporsi, o composta; sia essa del peso, o prezzo medio richiesto. Essendo le parti delle grandezze minori, minori, e delle maggiori, maggiori delle parti simili della media, per parti ad esse simili delle loro differenze (309); ne siegue, che le parti delle grandezze componenti maggiori, e minori devono essere tali, che le simili delle differenze de'

loro pesi, o prezzi dal peso, o prezzo della media, sieno uguali. Ond'è, che se queste parti sieno espresse da frazioni, che hanno lo stesso denominatore, devono avere la ragione de' loro numeri, simile alla reciproca delle differenze degli espressati pesi, o prezzi (308). Ma la somma di queste parti deve comporre la grandezza richiesta. Dunque la somma de' numeri, che l'esprimono, dev' essere uguale al loro comune denominatore. Perlocchè si determina ciascheduno di essi numeratori, con dividere il loro denominatore in parti, le di cui ragioni sono rispettivamente uguali alle reciproche di queste dell' espressate differenze.

347. Il metodo più facile per ciò eseguire si è di prendere per denominatore comune la somma delle differenze, e per numeratori le differenze stesse: in guisa che le differenze delle minori sieno i numeratori delle frazioni, ch' esprimono le parti delle grandezze maggiori, e quelle delle maggiori i numeratori delle frazioni, ch' esprimono le parti delle grandezze minori: ma talmente ripartite, che i numeratori delle frazioni, ch' esprimono le parti di una delle grandezze maggiori, ed una delle minori, sieno sempre le differenze delle stesse grandezze. E se mai il numero delle grandezze maggiori sia maggiore, o minore di quello delle minori, si consideri, nel primo caso una, o più delle minori, e nel secondo caso, una, o più delle maggiori, tante volte, quante ne necessitano, affinchè il numero delle grandezze maggiori sia uguale a quello delle minori. Ed egli è chiaro, ch' essendo il comune denominarore delle frazioni, ch' esprimono le parti delle grandezze, che devono comporre, o che compongono la grandezza media, la somma delle differenze di quelle grandezze da essa media; e li numeratori le differenze stesse; la somma dei numeratori sia uguale al denominarore comune; e perciò la somma delle riferite parti uguale all' intiera grandezza media. Inoltre essendo il numero delle grandezze maggiori uguale a quello delle minori; sarà ancora il numero degli eccessi

eccessi de' pesi, o prezzi delle parti delle grandezze maggiori riguardo al peso, o prezzo delle parti simili della grandezza media, uguale a quello de' difetti de' pesi, o prezzi delle parti delle grandezze minori, dal peso, o prezzo delle simili della stessa media: mà questi eccessi, e difetti sono uguali alle parti simili dell' espressate differenze (309); e le frazioni, ch' esprimono le parti delle maggiori, avendo lo stesso denominatore, hanno per numeratori rispettivamente una delle differenze delle minori: e quelle ch' esprimono le parti delle minori hanno per numeratori le rispettive differenze delle maggiori; dunque le ragioni, che hanno i numeratori delle frazioni, ch' esprimono le parti delle grandezze maggiori, a quelle delle frazioni, ch' esprimono le parti delle minori, sono uguali alle reciproche delle ragioni delle rispettive differenze; e perciò i difetti de' pesi, o prezzi delle minori riguardo al peso, o prezzo della media, sono rispettivamente uguali agli eccessi dei pesi, o prezzi de' maggiori dal peso, e prezzo di essa media (308): onde il peso, o prezzo della somma dell' espressate parti delle grandezze maggiori, e minori è uguale al peso, o prezzo della grandezza media da comporsi, o composta.

348. Si supponga, che si debba formare col rame, che vale 43 ducati il cantajo, e collo stagno, che ne vale 18, un Cannone di bronzo, che vaglia 40 ducati il cantajo.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 43. | 3 | $\frac{22}{25}$ |
| 40 | | | |
| | 18. | 22 | $\frac{3}{25}$ |
| | | 25 | |

Essendo 3 la differenza di 43, e 40; e 22 quella di 40, e 18; sarà 25 la loro somma, la quale presa per denominatore comune delle frazioni, che devono esprimere le parti del rame, e dello stagno,

colle quali si deve formare il bronzo richiesto; sarà 3 differenza del prezzo del rame da quello del bronzo, il numeratore della frazione, che deve esprimere le parti dello stagno; e 22 differenza di quello dello stagno dal prezzo del bronzo, il numeratore delle frazioni, che dev' esprimere le parti del rame: onde ogni cantajo di bronzo verrà formato da $\frac{3}{25}$ di stagno, e $\frac{22}{25}$ di rame: le quali frazioni hanno lo stesso denominatore 25, e la ragione del numeratore 3 della prima al numeratore 22 della seconda è uguale a quella di 3, differenza del prezzo del rame da quello del bronzo, a 22, differenza del prezzo dello stagno da quello del bronzo medesimo: sicchè la ragione degli espressati numeratori è uguale alla reciproca di quella delle differenze de' prezzi: e perciò di quanto il prezzo di $\frac{3}{25}$ di un cantajo di stagno è minore di quello di $\frac{3}{25}$ di un cantajo di bronzo, di altrettanto il prezzo di $\frac{22}{25}$ di un cantajo di rame è maggiore di quello di $\frac{22}{25}$ di un cantajo del bronzo medesimo (308, 309): perlocchè il bronzo formato dall' unione dell' espressate parti di stagno, e rame, deve necessariamente essere del prezzo richiesto. Infatti il prezzo di $\frac{3}{25}$ di un cantajo di stagno è due ducati, un carlino, e 6 grana; e quello di $\frac{22}{25}$ di un cantajo di rame è 37 ducati, 8 carlini, e 4 grana, i quali prezzi insieme uniti, fanno il prezzo richiesto di ducati quaranta.

349. Si supponga, che la farina, colla quale si deve fare il pane per li Soldati, debba essere del prezzo di 14 carlini il tomolo; e che in una Piazza non ve ne sia che de' prezzi di 11, e 20 carlini: onde si deve determinare quali parti dell' una, e dell' altra devono comporre un tomolo di farina affinchè sia del prezzo richiesto.

Essendo 6 la differenza di 20, e 3 la differenza di 11 da 14; sarà 9 la loro somma, la quale presa per denominatore comune delle frazioni, che devono esprimere le parti della farina di 20, e di 11 carlini, colle quali si deve formare il tomolo di quella di carlini 14; sarà 6, differenza del prezzo della farina migliore da quello della media, il numeratore della frazione, ch'esprime le parti della farina inferiore; e 3, differenza del prezzo della farina inferiore da quello della media medesima, il numeratore della frazione, che dev'esprimere le parti della farina migliore. Onde ogni tomolo della farina del prezzo medio sarà formato da $\frac{3}{9}$ della migliore, e $\frac{6}{9}$ dell'inferiore: le quali frazioni hanno lo stesso denominatore 9, e la ragione del numeratore 3 della prima al numeratore 6 della seconda, uguale a quella di 3, differenza del prezzo dell'inferiore da quello della media, a 6, differenza del prezzo della migliore, da quello della media medesima: sicchè la ragione degli espressati numeratori è uguale alla reciproca di quella delle differenze de' prezzi; e perciò di quanto il prezzo di $\frac{3}{9}$ di un tomolo della farina migliore è maggiore di quello di $\frac{3}{9}$ di un tomolo della media, di altrettanto il prezzo di $\frac{6}{9}$ di un tomolo dell'inferiore, è minore di $\frac{6}{9}$ di un tomolo della stessa media (308, 309): perlocchè la farina formata dall'unione dell'espressate parti della migliore, e della inferiore, deve necessariamente essere del prezzo ri-

richiesto. In fatti il prezzo di $\frac{1}{9}$ di un tomolo della farina migliore è 66 grana, e 8 cavalli; e quella di $\frac{8}{9}$ di un tomolo dell'inferiore è 73 grana, e 4 cavalli: i quali prezzi insieme uniti fanno il prezzo richiesto di carlini 14.

350. Si supponga, che vi sia un vecchio Cannone di bronzo, del quale un piede cubico pesi 639 libre di Parigi; e si voglia determinare quali sieno le parti del rame, e dello stagno, che lo compongono: essendo il peso di un piede cubico di rame 648, e di stagno 576 libre di Parigi.

$$\begin{array}{ccc|c} & 648 & 9 & \frac{63}{72} \\ 639 & & & \\ & 576 & 63 & \frac{9}{72} \\ \hline & & 72 & \end{array}$$

Poichè 9 è la differenza di 648 da 639, e 63 quella di 639 da 576; 72 n'è la loro somma, la quale si prende per comune denominatore delle frazioni, che devono esprimere le parti del rame, e dello stagno, che compongono il dato bronzo; e sarà 9 differenza del peso del rame da quello del bronzo, il numeratore della frazione, ch'esprime le parti dello stagno; e 63, differenza del peso dello stagno da quello del bronzo, il numeratore della frazione, ch'esprime le parti del rame. Onde in ogni piede cubico di bronzo si contengono $\frac{63}{72}$ di rame, e $\frac{9}{72}$ di stagno; le quali frazioni hanno lo stesso denominatore 72; e la ragione del numeratore 63 della prima al numeratore 9 della seconda, è uguale a quella di 63, differenza del peso dello stagno da quello del bronzo, a 9, differenza del peso del rame da quello del medesimo bronzo: sicchè la ragione degli espressati numeratori è uguale alla reciproca di quella delle differenze de' pesi; e perciò di quanto il peso di $\frac{63}{72}$ di

di un piede cubico di rame è maggiore del peso di $\frac{63}{72}$ di un piede cubico di bronzo, di altrettanto il peso di $\frac{9}{72}$ di un piede cubico di stagno, è minore di quello di $\frac{8}{72}$ di un piede cubico del bronzo medesimo (308, 309): perlochè il bronzo del dato peso deve necessariamente essere composto dall'espressate parti di rame, e stagno. In fatti il peso di $\frac{63}{72}$ di un piede cubico di rame è 567 libre: quello di $\frac{9}{72}$ di un piede cubico di stagno è 72 libre: i quali pesi insieme presi fanno il dato peso di 639.

351. Suppongasi, che da ciascheduno di 1736 barili di polvere finissima, se ne sia furtivamente tolta una porzione, riempiendoli con mescolare colla fina rimasta della polvere ordinarissima; e si debba determinare quanta della polvere fina sia stata rubata.

Dopo essersi fatte ugualmente asciugare la polvere fina, la mescolata, e l'ordinaria, se ne pesi un barile pieno successivamente di ciascheduna di esse. Or si supponga, che il barile pieno della polvere fina pesi 56 rotola, quello della mescolata 51 rotola, e quello dell'ordinaria rotola 44.

|  |  |  |
|---|---|---|
|  | 56 . 5 | $\frac{7}{12}$ |
| 51 |  |  |
|  | 44 . 7 | $\frac{5}{12}$ |
|  | 12 |  |

Poichè 5 è la differenza di 56 da 51, e 7 quella di 51 da 44, n'è 12 la loro somma, la quale si prende per comune denominatore delle frazioni, che devono esprimere le parti della polvere fina, e dell'ordinaria, che compongono la mescolata; e sarà 5, differenza del peso della polvere fina da quello della mescolata, il numeratore della frazione,

ne, ch'esprime le parti della polvere ordinaria, e 7, differenza del peso della polvere ordinaria da quello della mescolata, il numeratore della frazione ch'esprime le parti della polvere fina: onde in ogni barile di polvere mescolata si contengono $\frac{7}{12}$ della fina, e $\frac{5}{12}$ dell'ordinaria, le quali frazioni hanno lo stesso denominatore 12; e la ragione del numeratore 7 della prima al numeratore 5 della seconda, è uguale a quella di 7, differenza del peso della polvere ordinaria da quello della mescolata, a 5, differenza del peso della polvere fina dalla medesima mescolata: sicchè la ragione degli espressati numeratori è uguale alla reciproca di quella delle differenze de' pesi; e perciò di quanto il peso di $\frac{7}{12}$ di un barile della polvere fina è maggiore di quello di $\frac{7}{12}$ di un barile della mescolata, di altrettanto il peso di $\frac{5}{12}$ di un barile della polvere ordinaria, è minore di quello di $\frac{5}{12}$ di un barile della mescolata medesima (308, 309): perlocchè il barile della polvere mescolata, per essere del peso supposto, deve necessariamente contenere l'espressate parti della polvere fina, e dell'ordinaria. In fatti il peso di $\frac{7}{12}$ di un barile della polvere fina, è 32 rotola, 22 once, e $\frac{2}{9}$; e quello di $\frac{5}{12}$ di un barile della polvere ordinaria, è 18 rotola, 11 once, e $\frac{1}{9}$, i quali insieme presi fanno il peso di rotola 51 del barile della polvere mescolata. Dunque di ciascheduno barile della polvere fina ne hanno rubato 23 rotola, 11 once $\frac{1}{9}$, residuo che si ha sottraendo da 56 rotola, rotola 32, once 22, e $\frac{2}{9}$: e da tutti li 1736 barili, 405 cantaja, 6 rotola, 22 once, e $\frac{2}{9}$, prodotto, che si ha moltiplicando 23 rotola 11 once, e $\frac{1}{9}$, per 1736.

352. Suppongasi, che con carri coperti si debbano

no trasportare quattro diversi generi, che sieno d' uso per l'Artiglieria, impiegandovi il minor numero possibile di carri. Egli è chiaro, che i generi devono essere ripartiti in guisa, che ciaschedun carro ne sia pieno, e ne abbia tutto il peso di cui è capace. Or si supponga, che il peso che si può trasportare con uno di essi carri non debba essere maggiore di 256 rotola; e che se si riempisse interamente del primo de' riferiti generi, avrebbe un peso di 327 rotola; se del secondo, l'avrebbe di 289; se del terzo l'avrebbe di 213; e se del quarto l'avrebbe di 189. Onde si deve determinare quali parti di ciascheduno degli espressati generi devono formare il carico di ogni carro.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 327 . 71 | $\frac{67}{214}$ | ovvero | $\frac{43}{214}$ |
| | 289 . 33 | | | |
| 256 | | $\frac{43}{214}$ | | $\frac{67}{214}$ |
| | 213 . 43 | $\frac{33}{214}$ | | $\frac{71}{214}$ |
| | 189 . 67 | | | |
| | 214 | $\frac{71}{214}$ | | $\frac{33}{214}$ |

Essendo 71 la differenza di 327, e 33 quella di 289 da 256, e 43 la differenza di 213, e 67 quella di 189 da 256; ne sarà 214 la loro somma, la quale presa per denominatore comune delle frazioni, che devono esprimere le parti degli espressati generi, colle quali si deve formare l'intero carico; sarà o 67, differenza del peso del quarto genere, da quello del carico, il numeratore della frazione, che dev' esprimere le parti del primo genere; e 71 differenza del peso del primo genere da quello del carico, il numeratore della frazione, che dev' esprimere le parti del quarto genere; e 43, differenza del peso del terzo genere, da quello del carico, il numeratore della frazione, che dev' esprimere le parti del secondo genere; e 33, differenza del peso del secondo genere da quello del carico, il numeratore della frazione, che dev' esprimere le parti

ti del terzo genere ; ovvero 43 differenza del peso del terzo genere da quello del carico , il numeratore della frazione che dev' esprimere le parti del primo genere ; e 71 , differenza del peso del primo genere da quello del carico , il numeratore della frazione , che dev' esprimere le parti del terzo genere ; e 67, differenza del peso del quarto genere da quello del carico , il numeratore della frazione, che dev' esprimere le parti del secondo genere ; e 33 , differenza del peso del secondo genere da quello del carico , il numeratore della frazione , che dev' esprimere le parti del quarto genere. Onde il vuoto di ogni carro verrà riempito o da $\frac{67}{214}$ del primo genere , e $\frac{43}{214}$ del secondo , e $\frac{33}{214}$ del terzo , e $\frac{71}{214}$ del quarto ; ovvero da $\frac{43}{214}$ del primo genere, e $\frac{67}{214}$ del secondo , e $\frac{71}{214}$ del terzo, e $\frac{33}{214}$ del quarto : le quali frazioni hanno lo stesso denominatore 214 ; e nel primo caso la ragione del numeratore 67 della prima al numeratore 71 della quarta, è uguale a quella di 67, differenza del peso del quarto genere da quello del carico, a 71 differenza del peso del primo genere da quello del carico ; la ragione del numeratore 43 della seconda al numeratore 33 della terza , è uguale a quella di 43 , differenza del peso del terzo genere da quello del carico, a 33, differenza del peso del secondo genere, da quello del carico ; e nel secondo caso la ragione del numeratore 43 della prima al numeratore 71 della terza , è uguale a quella di 43 , differenza del peso del terzo genere da quello del carico, a 71, differenza del peso del primo genere da quello del carico ; e la ragione del numeratore 67 della seconda al numeratore 33 della quarta , è uguale a quella di 67, differenza del peso del quarto genere da quello del carico, a 33, differenza del peso del secondo genere, da quello del carico : sicchè le ragioni degli espressati numeratori sono uguali così nel primo , che nel secondo caso , alle reciproche di

di quelle delle corrispondenti differenze de' pesi ; e perciò nel primo caso di quanto il peso di $\frac{67}{214}$ del carico del primo genere è maggiore del peso di $\frac{67}{214}$ del carico richiesto , di altrettanto il peso di $\frac{71}{214}$ del carico del quarto genere è minore del peso di $\frac{71}{214}$ del carico richiesto ; e di quanto il peso di $\frac{43}{214}$ del carico del secondo genere è maggiore del peso di $\frac{43}{214}$ del carico richiesto , di altrettanto il peso di $\frac{33}{214}$ del carico del terzo genere è minore del peso di $\frac{33}{214}$ del carico richiesto : e nel secondo caso di quanto il peso di $\frac{43}{214}$ del carico del primo genere è maggiore del peso di $\frac{43}{214}$ del carico richiesto , di altrettanto il peso di $\frac{71}{214}$ del carico del terzo genere è minore del peso di $\frac{71}{214}$ del carico richiesto ; e di quanto il peso di $\frac{67}{214}$ del carico del secondo genere è maggiore del peso di $\frac{67}{214}$ del carico richiesto , di altrettanto il peso di $\frac{33}{214}$ del carico del quarto genere è minore del peso di $\frac{33}{214}$ del carico richiesto (308, 309) : perlocchè essendo in ambi li casi , la somma degli eccessi de' pesi maggiori eguale a quella de' difetti dei minori : il carico formato dell' espressate parti de' riferiti generi sarà del peso richiesto. In fatti il peso di $\frac{67}{214}$ del carico del primo genere è 102 rotola, 12 once, e $\frac{396}{642}$ : quello di $\frac{43}{214}$ del carico del secondo genere è 58 rotola , 2 once, e $\frac{216}{642}$ : quello di $\frac{33}{214}$ del carico del terzo genere è 32 rotola, 28 once, e $\frac{124}{642}$ : e quello di $\frac{71}{214}$ del carico del quarto genere è 62 rotola , 23 once, e $\frac{334}{642}$ : i quali pesi insieme uniti fanno , nel primo caso , il peso ri-

richiesto di 256 rotola ; il peso di $\frac{43}{214}$ del carico del primo genere è 65 rotola , 23 once, e $\frac{334}{642}$; quello di $\frac{67}{214}$ del carico del secondo genere è 90 rotola , 16 once, e $\frac{28}{642}$ : quello di $\frac{71}{214}$ del carico del terzo genere è 70 rotola , 22 once , e $\frac{176}{642}$ : e quello di $\frac{33}{214}$ del carico del quarto genere è 29 rotola , 4 once, e $\frac{532}{642}$ : i quali pesi insieme uniti fanno , anche nel secondo caso, il peso richiesto di 256 rotola .

353. Finalmente si supponga , che si abbia una porzione di miniera di rame , dalla quale , col lavarla , e torrefarla , si sieno separate le parti pietrose , terrose, sulfuree , ed arsenicali ; ed indi coll' operazione chimica corrispondente , si sia ridotta a ciò , che dicesi rame nero , vale a dire ad un rame mischiato con altre sostanze metalliche , che quasi sempre sono il piombo , il ferro , lo stagno , il bismuth , e la parte regolina dell' antimonio ; si debba determinare quanto rame , e quanto degli espressati metalli , e semimetalli si contengono in essa . Or si supponga , che il peso di un piede cubico di piombo sia 828 libre di Parigi , di rame 648 , di ferro 590 , di stagno 576 , di bismuth 489 , di Regolo d' antimonio 472 ; ed il peso di un piede cubico del rame nero 596 libre Parigine .

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Piombo | 828. | 232 | $\frac{6}{825}$ | $\frac{20}{825}$ |
| | | | 232 | | |
| | Rame . | 648. | 52 | $\frac{107}{825}$ | $\frac{124}{825}$ |
| Rame nero 596 | | | 52 | | |
| | Ferro . | 590. | 6 | $\frac{232}{825}$ | |
| | Stagno . | 576. | 20 | $\frac{232}{825}$ | |
| | Bismuth | 489. | 107 | $\frac{52}{825}$ | |
| | Regolo d' antimonio | 472. | 124 | $\frac{52}{825}$ | |
| | | | 825 | | |

Poi-

Poichè i pesi maggiori del medio sono due, ed i minori quattro, perciò ciascheduno delli maggiori si deve considerare due volte, e due volte ancora si devono considerare le differenze del medio, affinchè il numero de' pesi maggiori sia uguale a quello de' minori. Quindi essendo 232, e 232 le differenze di 828; 52, e 52 quelle di 648 da 596; e 6 la differenza di 590; 20 quella di 576; 107 quella di 489, e 124 quella di 472 da 596; ne sarà 825 la loro somma, la quale presa per denominatore comune delle frazioni, che devono esprimere le parti del piombo, del rame, del ferro, dello stagno, del bismuth, e del regolo d'antimonio, che compongono il rame nero, saranno 6, differenza del peso del ferro, e 20, differenza del peso dello stagno da quello del rame nero, li numeratori delle frazioni, che devono esprimere le parti del piombo; 107, differenza del peso del bismuth, e 124, differenza del peso del regolo d'antimonio da quello del rame nero, li numeratori delle frazioni, che devono esprimere le parti del rame; 232, e 232, differenza del peso del piombo da quello del rame nero, li numeratori delle frazioni, delle quali una dev' esprimere le parti del ferro, e l'altra quelle dello stagno; 52, e 52, differenze del peso del rame da quello del rame nero, li numeratori delle frazioni, delle quali una dev' esprimere le parti del bismuth, e l'altra quelle del regolo d'antimonio. Onde in ogni piede cubico di rame nero si contengono $\frac{6}{825}$, e $\frac{20}{825}$ di piombo, $\frac{107}{825}$, e $\frac{124}{825}$ di rame, $\frac{232}{825}$ di ferro, $\frac{232}{825}$ di stagno, $\frac{52}{825}$ di bismut, e $\frac{52}{825}$ di regolo d'antimonio; le quali frazioni hanno lo stesso denominatore 825, e la ragione del numeratore 6 della prima al numeratore 232 della quinta, è uguale a quella di 6, differenza del peso del ferro da quello del rame nero, a 232, differenza del peso del piombo da quello del rame nero; e la ragione del numeratore 20 della

la seconda, al numeratore 232 della sesta, è uguale a quella di 20, differenza del peso dello stagno da quello del rame nero, a 232, differenza del peso del piombo, da quello del rame nero; la ragione del numeratore 107 della terza al numeratore 52 della settima, è uguale a quella di 107, differenza del peso del bismuth, da quello del rame nero, a 52, differenza del peso del rame da quella del rame nero; e la ragione del numeratore 124 della quarta al numeratore 52, dell'ottava, è uguale a quella di 124, differenza del peso del regolo d'antimonio da quello del rame nero, a 52, differenza del peso del rame da quello del rame nero; sicchè le ragioni degli espressati numeratori sono uguali alle reciproche di quelle delle corrispondenti differenze de' pesi, e perciò di quanto il peso di $\frac{6}{825}$ di un piede cubico di piombo, è maggiore di quello di $\frac{6}{825}$ di un piede cubico di rame nero, di altrettanto il peso di $\frac{232}{825}$ di un piede cubico di ferro è minore di quello di $\frac{232}{825}$ di un piede cubico di rame nero; di quanto il peso di $\frac{20}{825}$, di un piede cubico di piombo è maggiore di quello di $\frac{20}{825}$ di un piede cubico di rame nero, di altrettanto il peso di $\frac{232}{825}$ di un piede cubico di stagno è minore di quello di $\frac{232}{825}$ di un piede cubico di rame nero; di quanto il peso di $\frac{107}{825}$ di un piede cubico di rame è maggiore di quello di $\frac{107}{825}$ di un piede cubico di rame nero, di altrettanto il peso di $\frac{52}{825}$ di un piede cubico di bismut è minore di quello di $\frac{52}{825}$ di un piede cubico di rame nero; e di quanto il peso di $\frac{124}{825}$ di un piede cubico di rame è maggiore di quello di $\frac{124}{825}$ di un piede cubico

bico di rame nero, di altrettanto il peso di $\frac{52}{825}$ di un piede cubico di Regolo d'antimonio è minore di quello di $\frac{52}{825}$ di un piede cubico di rame nero (308, 309): perlocchè essendo la somma degli eccessi de' pesi maggiori uguale a quella de' difetti de' minori; il rame nero del dato peso può contenere l'espressate parti di piombo, rame, ferro, stagno, bismuth, e regolo d'antimonio. In fatti il peso di $\frac{26}{825}$ di un piede cubico di piombo è libre di Parigi 26, once 1, dramme 4, e $\frac{84}{825}$; quello di $\frac{231}{825}$ di un piede cubico di rame è 181. 7. 0, e $\frac{264}{825}$; quello di $\frac{232}{825}$ di un piede cubico di ferro è 165. 14. 5, e $\frac{115}{825}$; quello di $\frac{232}{825}$ di un piede cubico di stagno è 161. 15. 5, e $\frac{171}{825}$; quello di $\frac{52}{825}$ di un piede cubico di bismuth è 30. 13. 1, e $\frac{159}{825}$; e quello finalmente di $\frac{52}{825}$ di un piede cubico di regolo d'antimonio è 29. 12. 0, e $\frac{32}{825}$; i quali pesi insieme sommati fanno 596 libre di Parigi, peso di un piede cubico del rame nero.

354. Egli è necessario l'avvertirsi, che i due ultimi problemi sono suscettibili, oltre l'esposte, di molte altre soluzioni; locchè accade in tutti quei problemi della Regola d'Allegazione, ne' quali le grandezze componenti la media sono più di due, a causa delle molte combinazioni, con cui le grandezze maggiori si possono paragonare alle minori; le quali combinazioni però sempre si riducono a rendere il numero delle grandezze maggiori, uguale a quello delle minori. In fatti qualora una delle grandezze maggiori, o minori si voglia paragonare con ciascheduna delle rimanenti; i numeratori delle frazioni, che alla grandezza, la quale si paragona, derivano dal paragonarsi, nel primo caso, alle altre maggiori, e nel secondo, alle altre minori, si devono sottrarre dalla somma degli altri suoi numeratori,

## §. V.

### *Della Regola ſemplice del Falſo.*

355. L'Operazione, colla quale ſi determina una grandezza con un'altra qualunque, e con quella, che deriva dall'attribuire a queſt'altra tutte le condizioni della richieſta, diceſi *Regola ſemplice del Falſo*.

356. Si riſolvono colla regola ſemplice del falſo que'problemi, ne'quali ſi deve determinare una grandezza, di cui è data una parte, o la ſomma di eſſa, e di una delle ſue parti. Quindi è, che eſſendo la ragione delle parti di due grandezze, compoſta da quelle delle grandezze, e delle frazioni, che le denominano (308); ed eſſendo uguali le frazioni, che denominano le parti ſimili; e perciò le parti ſimili delle grandezze, proporzionali alle grandezze medeſime (304); e alle grandezze ſteſſe proporzionali le ſomme di eſſe, e delle loro parti ſimili (315); ſe ſi ſupponga eſſere la richieſta una grandezza qualunque, e ſe ne prenda una parte ſimile alla data, s'avrà la grandezza, che ſi vuole col ritrovare il quarto proporzionale dopo la parte, e la grandezza preſa, e la parte data, nel primo caſo: dopo la ſomma della parte, e della grandezza preſa di eſſa grandezza, e della ſomma data nel ſecondo.

357. Si ſupponga eſſer pervenuto a notizia di un Generale, che di un diſtaccamento nemico $\frac{1}{5}$ guarda un ponte, $\frac{2}{7}$ occupano un'altura, $\frac{3}{8}$ vanno a porre in contribuzione un Villaggio, e 117 uomini ſi ſono impadroniti di un molino; e ſi voglia ſapere qual numero d'uomini compongono queſto diſtaccamento.

Poichè la ſomma de' rotti $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{7}$, e $\frac{3}{8}$ è $\frac{241}{280}$; li 117 uomini ſono li $\frac{39}{280}$ dell'intiero diſtaccamento; onde, ſe ſi ſupponga, che il Diſtaccamento

ſia

sia di 280 uomini; li $\frac{39}{280}$ di esso saranno 39 uomini, e perciò la ragione di 39 a 280 simile a quella di 117 al numero degli uomini, che compongono il Distaccamento (356): perlocchè il numero degli uomini, che compongono l'espressato Distaccamento sarà 840, quarto proporzionale dopo 39, 280, e 117.

358. Si supponga esser solamente noto, che la somma di $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{7}$, e $\frac{2}{13}$ di una guarnigione sia 1268 uomini; e si voglia sapere il numero degli uomini, che compongono la guarnigione intera.

Poichè la somma de' rotti $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{7}$, e $\frac{2}{13}$ è $\frac{317}{455}$; li 1268 uomini sono li $\frac{317}{455}$ dell' intera guarnigione; onde se si supponga, che la guarnigione sia di 455 uomini; li $\frac{317}{455}$ di essa saranno 317 uomini; e perciò la ragione di 317 a 455 simile a quella di 1268 al numero degli uomini, che compongono la guarnigione (356): perlocchè il numero degli uomini, che compongono l'espressata guarnigione, sarà 1820, quarto proporzionale dopo 317, 455, e 1268.

359. Si supponga inoltre esser noto, che un Esercito insieme co' suoi $\frac{3}{7}$ sia di 26270 uomini, e si voglia sapere il numero degli uomini, che lo compongono.

360. Suppongasi, che l'Esercito sia composto da 56 uomini, di cui li $\frac{3}{7}$, e 24 è la somma di esso, e suoi $\frac{3}{7}$ è 80; sarà la ragione di 80 a 56 simile a quella di 26270 al numero degli uomini, che compongono l'Esercito (356): perlocchè il numero degli uomini, che compongono l'espressato Esercito è 18389, quarto proporzionale dopo 80, 56, e 26270.

361. Finalmente si supponga esser noto, che un Esercito insieme co' suoi $\frac{5}{11}$, e $\frac{4}{9}$, toltine i $\frac{3}{7}$ della somma, sia di 21056 uomini; e si voglia sa-

pere il numero degli uomini, che lo compon gono.

Poichè la somma dell' unità, e de' rotti $\frac{5}{11}$, e $\frac{4}{9}$, e $\frac{1316}{693}$, di cui li $\frac{3}{7}$ sono $\frac{564}{693}$, che da essa sottratti, rimane $\frac{752}{693}$; perciò li 21056 uomini sono li $\frac{752}{693}$ dell' Esercito, cioè sono uguali all' Esercito insieme co' suoi $\frac{59}{693}$: onde se si supponga, che l' Esercito sia composto da 693 uomini; ne saranno 59 uomini li $\frac{59}{693}$, e 752 la somma di esso, e de' suoi $\frac{59}{693}$; e perciò la ragione di 752 a 693, simile a quella di 21056 al numero degli uomini, che compongono l' Esercito (356); perlocchè il numero degli uomini, che compongono l' espressato Esercito è 19404, quarto proporzionale dopo 752, 693, e 21056.

### *Della Regola doppia del Falso.*

362. L'Operazione, colla quale attribuendosi a ciascheduna di due grandezze qualunque tutte le condizioni, che deve avere la grandezza richiesta, questa si determina con quello, per che esse grandezze differiscono tra se, e dalle riferite condizioni, dicesi *Regola doppia del Falso*.

363. Si risolvono colla regola doppia del falso que' problemi, ne' quali si devono determinare grandezze, che per adempiere a tutte le condizioni, si devono loro aggiungere, o togliere certe date grandezze, o parti di compimenti a grandezze date, o parti di grandezze, che vengono determinate da alcune delle condizioni del problema.

364. Or sebbene le grandezze, alle quali non competono certe condizioni, non possano in alcun modo a quelle adempire: egli è non per tanto indubitato, che quanto più queste si accostano alle grandezze, alle quali le condizioni competono, tanto più ancora si approssimano all' adempimento di

di esse, e tanto più se ne discostano, quanto più da quelle differiscono: ond'è, che le differenze delle grandezze, alle quali si sono attribuite le stesse condizioni, devono necessariamente essere proporzionali alle differenze delle grandezze, per cui esse mancano, o eccedono da quelle condizioni: e qualora delle grandezze una manca, e l'altra eccede le condizioni medesime, la loro differenza dev' essere proporzionale alla somma delle grandezze, per cui dalle condizioni differiscono. Quindi se ne deduce, che essendo zero la differenza da certe condizioni d'una grandezza, alla quale quelle condizioni competono, sia la differenza da questa di una grandezza, alla quale si sieno attribuite le stesse condizioni, proporzionale a quella, per cui essa grandezza differisce dalle condizioni medesime: perlocchè se le medesime condizioni si attribuiscono a due grandezze, alle quali non competono; la ragione della loro differenza, alla differenza di una di esse da quella, alla quale competono le condizioni, è simile alla ragione della differenza delle grandezze, per cui differiscono dalle condizioni, (se ambedue differiscono in eccesso, o in difetto) e della somma di esse, (se una differisce in eccesso, e l'altra in difetto) alla differenza dalle condizioni di quella delle due grandezze, di cui si è nella prima ragione considerata la differenza, da quella, alla quale competono le condizioni. Dunque si determina la grandezza, alla quale competono alcune condizioni, coll' attribuire le condizioni ad altre due grandezze, (che chiameremo le ipotesi, poichè si suppongono essere la grandezza richiesta) col determinare le grandezze per cui differiscono dalle condizioni, che diremo errori simili, se ambi sono per eccesso, o per difetto; dissimili, se uno è per eccesso, e l'altro per difetto, e col ritrovare il quarto proporzionale dopo la differenza degli errori, se sono simili, la loro somma; se dissimili, uno di essi, e la differenza dell'ipotesi: il quale quarto proporzionale, sarà la differenza della grandezza richiesta dell'ipo-

tesi da cui è derivato l'errore, che nella proporzione si è preso per secondo termine: la qual differenza sarà per eccesso, o per difetto, secondocchè l'errore derivato da questa ipotesi è per eccesso, o per difetto; e perciò si avrà la grandezza richiesta col sottrarre, nel primo caso, e coll'aggiungere, nel secondo, il quarto proporzionale ritrovato all' ipotesi medesima.

365. Si supponga, che i soldi di tre Uffiziali debbano esser tali, che quello del primo con 67 ducati sia doppio della somma di quei degli altri due; quello del secondo con 67 ducati sia triplo della somma di quei degli altri due; e quello del terzo colli stessi 67 ducati sia quadruplo della somma di quei de' due rimanenti: e si debba determinare ciascheduno di essi.

Suppongasi essere un ducato il soldo del primo Uffiziale; ne sarà 34 la somma di quei degli altri due, che con uno, e 67 fa 102. Or poichè il soldo del secondo con 67 ducati dev' essere il triplo della somma di que' degli altri; sarà la somma de' soldi di tutti tre, con 67 ducati, il quadruplo della somma de' soldi del primo, e del terzo; e perciò il soldo del terzo sarà 24 ducati, e mezzo: residuo, che si ha togliendo uno dalla quarta parte di 102; e il soldo del secondo sarà 9 ducati, e mezzo: compimento a ducati 34 del soldo del terzo. Ma il quadruplo della somma de' soldi del primo, e del secondo dev' essere uguale a quello del terzo, con 67 ducati; ed il quadruplo della somma di uno, e $9\frac{1}{2}$ è 42, minore della somma di 67, e $24\frac{1}{2}$, di $49\frac{1}{2}$. Dunque di $49\frac{1}{2}$ l'ipotesi uno manca dall' espressate condizioni. Si supponga essere tre ducati il soldo del primo Uffiziale; ne sarà 35 la somma di que' degli altri due, che con tre, e 67 fa 105: poichè il soldo del secondo con 67 ducati dev' essere il triplo della somma di que' degli altri; sarà la somma de' soldi di tutti tre con 67 ducati, il quadruplo della somma de' soldi del primo, e del terzo; e perciò il soldo del

del terzo sarà 23 ducati, e $\frac{1}{4}$: residuo, che si ha togliendo 3 dalla quarta parte di 105; e il soldo del secondo sarà 11 ducati, e $\frac{1}{4}$, compimento a ducati 35 del soldo del terzo: ma il quadruplo della somma de' soldi del primo, e del secondo dev' essere uguale a quello del terzo, con 67 ducati; e il quadruplo della somma di 3, e 11 $\frac{1}{4}$ è 59, minore della somma di 67, e 23 $\frac{1}{4}$, di 31 $\frac{1}{4}$. Dunque di 31 $\frac{1}{4}$ l'ipotesi 3 manca dall' espressate condizioni. Perlocchè essendo simili gli errori 49 $\frac{1}{2}$, e 31 $\frac{1}{4}$; la ragione di 18 $\frac{1}{4}$, differenza di essi, a 31 $\frac{1}{4}$, ovvero a 49 $\frac{1}{2}$, è simile a quelle di 2, differenza delle ipotesi, alla differenza di 3, ovvero di uno dal numero richiesto; del quale sono minori ambe le ipotesi, perchè gli errori sono ambi per difetto (363). Onde il numero richiesto è 6 $\frac{62}{146}$, che si ha così con aggiungere a 3 il quarto proporzionale dopo 18 $\frac{1}{4}$, 31 $\frac{1}{4}$, e 2, che con aggiungere ad uno il quarto proporzionale dopo 18 $\frac{1}{4}$, 49 $\frac{1}{2}$, e 2. In fatti essendo 6 ducati, e $\frac{62}{146}$ il soldo del primo Uffiziale; ne sarà 36 $\frac{104}{146}$ la somma di que' degli altri due, che con 6 $\frac{62}{146}$, e 67 fa 110 $\frac{20}{146}$: poichè il soldo del secondo con 67 ducati, deve essere il triplo della somma di que' degli altri; sarà la somma de' soldi di tutti tre con 67 ducati il quadruplo della somma de' soldi del primo, e del terzo; e perciò il soldo del terzo sarà 21 ducati $\frac{16}{146}$: residuo, che si hà togliendo 6 $\frac{62}{146}$ dalla quarta parte di 110 $\frac{20}{146}$; e il soldo del secondo sarà 15 ducati, e $\frac{88}{146}$, compimento a ducati 36, e $\frac{104}{146}$ del soldo del terzo: ma il quadruplo della somma de' soldi del primo, e del secondo dev' essere ugua-

le a quello del terzo con 67 ducati ; e il quadruplo della somma di 6 $\frac{62}{146}$, e di 15 $\frac{88}{146}$ è 88 $\frac{16}{146}$ uguale alla somma di 21 $\frac{16}{146}$, e di 67. Dunque 6 $\frac{62}{146}$ è il soldo richiesto del primo Uffiziale, da cui quei degli altri due derivano.

366. Si supponga essere solamente noto, che due distaccamenti nemici sieno tali, che se dal primo se ne tolga il quarto, e se gli aggiunga il quinto del secondo, e dal secondo se ne tolga il quinto, e se gli aggiunga il quarto del primo, sia ciascheduno di essi di 550 Uomini: e si voglia sapere il numero degli Uomini, che li compongono.

Suppongasi, che il primo Distaccamento sia di 680 Uomini : ne sarà il secondo di 420, compimento di 680 a 1100, ch' è la somma de' Distaccamenti richiesti. Si tolga da 680 il suo quarto, ch'è 170, e se gli aggiunga il quinto di 420, ch' è 84; e si avrà 594 maggiore di 550 per 44. Dunque di 44 l'ipotesi 680 eccede l'espressate condizioni. Si supponga, che il primo Distaccamento sia di 640 Uomini: ne sarà il secondo di 460, compimento di 640 a 1100: si tolga da 640 il suo quarto, ch'è 160, e se gli aggiunga il quinto di 460, ch'è 92; e si avrà 572, maggiore di 550 per 22. Dunque di 22 l'ipotesi 640 eccede l'espressate condizioni. Perlocchè essendo simili gli errori 44, e 22; la ragione di 22, differenza di essi, a 22, ovvero a 44, è simile a quella di 40, differenza delle ipotesi alla differenza di 640, ovvero di 680 dal numero richiesto ; del quale sono maggiori ambe le ipotesi, perchè gli errori sono ambi per eccesso (363). Onde il numero richiesto è 600, che si ha così con togliere da 640 il quarto proporzionale dopo 22, 22, e 40, che con togliere da 680 il quarto proporzionale dopo 22, 44, e 40. In fatti essendo il primo Distaccamento di 600 Uomini ; ne sarà l'altro di 500, compimento di 600 a 1100. Si tolga da 600 il suo quarto, ch'è 150, e se gli aggiunga il quinto di 500, ch'è 100, e s'avrà

s'avrà 550. Dunque 600 è il numero degli Uomini, che compongono il primo Distaccamento.

367. Si supponga essere solamente noto, che ciascheduno di tre Distaccamenti nemici sarebbe di 820 Uomini, se al numero degli Uomini, che compongono il primo si aggiungesse il terzo di quello degli Uomini, che compongono il secondo; a quello del secondo il quarto di quello del terzo; e a quello del terzo, il quinto di quello del primo: e si voglia sapere qual numero d'Uomini compone ciascheduno de' tre espressati Distaccamenti.

Suppongasi, che il primo Distaccamento sia di 600 Uomini; il secondo sarà di 660, ch'è il triplo del compimento di 600 a 820; e il terzo sarà di 640, ch'è il quadruplo del compimento di 660 a 820, al quale, se si aggiunga il quinto del primo, ch'è 120, s'avrà 760 minore di 820 per 60. Dunque di 60 l'ipotesi 600 manca dall'espressate condizioni. Si supponga, che il primo Distaccamento sia di 640 Uomini; il secondo sarà di 540, ch'è il triplo del compimento di 640 a 820; e il terzo sarà di 1120, ch'è il quadruplo del compimento di 540 a 820: al quale, se si aggiunga il quinto del primo, ch'è 128, s'avrà 1248 maggiore di 820 per 428. Dunque di 428 l'ipotesi 640 eccede l'espressate condizioni. Perlocchè essendo dissimili gli errori 60, e 428; la ragione di 488, somma di essi, a 60, ovvero a 428, è simile a quella di 40 differenza delle ipotesi, alla differenza di 600, ovvero di 640 dal numero richiesto, del quale l'ipotesi 600 è minore, e l'ipotesi 640 è maggiore; perchè l'errore, che deriva dalla prima, è per difetto, e quello, che deriva dalla seconda, è per eccesso (363). Onde il numero richiesto è 604 $\frac{448}{488}$, che si ha, così con aggiungere a 600 il quarto proporzionale dopo 488, 60, e 40, che con togliere da 640 il quarto proporzionale dopo 488, 428, e 40. Infatti essendo il primo Distaccamento di 604 Uomini e $\frac{448}{488}$; sarà il secondo di 645 $\frac{120}{488}$, ch'è il triplo del compi-

pimento di 604 $\frac{448}{488}$ a 820; e sarà il terzo di 699 $\frac{8}{488}$, ch'è il quadruplo del compimento di 645 $\frac{120}{488}$ a 820: al quale se si aggiunga il quinto del primo, ch'è 120 $\frac{60}{61}$; s'avrà 820. Dunque 604 $\frac{448}{488}$, sarà il numero degli Uomini, che compongono il primo Distaccamento.

368. Poichè gli errori per difetto sono tantoppiù maggiori, quanto più le ipotesi da cui derivano sono minori; e gli errori per eccesso sono tanto più maggiori, quanto più le ipotesi da cui derivano sono maggiori (363); se in un problema della regola doppia del falso, essendo simili gli errori, si moltiplicano, la ipotesi prima per il secondo errore, e l'ipotesi seconda pel primo errore; si viene nel caso di esser ambi gli errori per difetto, a moltiplicare l'ipotesi minore per l'errore minore, e l'ipotesi maggiore per l'errore maggiore; e nel caso di essere ambi gli errori per eccesso, l'ipotesi minore per l'errore maggiore, e l'ipotesi maggiore per l'errore minore; onde nel primo caso il prodotto dell'ipotesi maggiore moltiplicata pell'errore maggiore è uguale alla somma de' prodotti dell'ipotesi minore moltiplicata per l'errore minore, e per la differenza degli errori; e della differenza delle ipotesi moltiplicata per la differenza degli errori, e per l'errore minore (213); e perciò la differenza de' prodotti dell'ipotesi prima moltiplicata per l'errore secondo, e dell'ipotesi seconda moltiplicata per l'errore primo, è uguale alla somma de' prodotti della differenza delle ipotesi moltiplicata per la differenza degli errori, e per l'errore minore, e dell'ipotesi minore moltiplicata per la differenza degli errori; e nel secondo caso il prodotto dell'ipotesi maggiore moltiplicata per l'errore minore, è uguale alla somma de' prodotti dell'ipotesi minore, e della differenza delle ipotesi, moltiplicate per l'errore minore; e il prodotto dell'ipotesi minore moltiplicata per l'errore maggiore, è uguale alla somma de' prodotti dell'ipo-

tesi minore moltiplicata per l' errore minore, e per la differenza degli errori (212); e perciò la ferenza de' prodotti dell' ipotesi prima moltiplicata per l'errore secondo, e dell' ipotesi seconda moltiplicata per l'errore primo, è uguale alla differenza de' prodotti dell' ipotesi minore moltiplicata per la differenza degli errori, e della differenza delle ipotesi moltiplicata per l' errore minore: ma nel primo caso il prodotto della grandezza richiesta moltiplicata per la differenza degli errori, è uguale alla somma de' prodotti dell' ipotesi minore, della differenza delle ipotesi, e della differenza dell'ipotesi maggiore dalla grandezza richiesta, moltiplicata per la differenza degli errori; e nel secondo caso, il prodotto dell' ipotesi minore moltiplicata per la differenza degli errori, è uguale alla somma de' prodotti della grandezza richiesta, e della differenza di essa dall' ipotesi minore moltiplicata per la differenza degli errori; e la ragione della differenza degli errori all' errore minore, è simile a quella della differenza delle ipotesi, alla differenza della grandezza richiesta dall' ipotesi maggiore nel primo caso, e dall' ipotesi minore nel secondo (363): e perciò il prodotto della differenza degli errori, moltiplicata per la differenza della grandezza richiesta dall'ipotesi maggiore nel primo caso, e dall' ipotesi minore nel secondo, è uguale al prodotto della differenza delle ipotesi moltiplicata per l'errore minore (320). Dunque in ambi i casi la differenza de' prodotti dell' ipotesi prima moltiplicata per l' errore secondo, e dell' ipotesi seconda moltiplicata per l'errore primo, è uguale al prodotto della grandezza richiesta moltiplicata per la differenza degli errori: perlocchè la grandezza richiesta è il quoto della differenza degli espressati prodotti, divisa per la differenza degli errori (112). Or se degli errori il primo sia per difetto, e 'l secondo per eccesso; il prodotto dell' ipotesi maggiore moltiplicata per il primo errore, sarà uguale alla somma de' prodotti dell' ipotesi minore, e delle differenze della gran-

dez-

dezza richiesta dall'una, e l'altra ipotesi, moltiplicate per l'errore primo: onde la somma de'prodotti dell'ipotesi prima moltiplicata per l'errore secondo; e dell'ipotesi seconda moltiplicata per l'errore primo, è uguale alla somma de' prodotti dell'ipotesi prima moltiplicata per l'errore secondo, e dell'ipotesi prima; e le differenze della grandezza richiesta da ambi le ipotesi moltiplicate per il primo errore: ma il prodotto della grandezza richiesta moltiplicata per la somma degli errori è uguale alla somma de' prodotti dell'ipotesi minore, e della differenza dell'ipotesi minore dalla grandezza richiesta, moltiplicate per ambi gli errori; perlocchè la differenza della somma de' prodotti dell' ipotesi prima moltiplicata per l'errore secondo, e dell'ipotesi seconda moltiplicata per l'errore primo, dal prodotto della grandezza richiesta moltiplicata per la somma degli errori, è uguale alla differenza del prodotto della differenza dell'ipotesi maggiore dalla grandezza richiesta moltiplicata per il primo errore, dal prodotto della differenza della grandezza richiesta dall'ipotesi minore moltiplicata per l'errore secondo: e questi prodotti sono uguali tra se; perchè la ragione della somma degli errori all'errore primo, è simile a quella della differenza delle ipotesi alla differenza della grandezza richiesta dall' ipotesi minore (363): e dividendo (315) la ragione dell'errore secondo all'errore primo, è simile a quella della differenza dell' ipotesi maggiore dalla grandezza richiesta, alla differenza della grandezza richiesta dall'ipotesi minore (320). Dunque la somma de' prodotti dell' ipotesi prima moltiplicata per l'errore secondo, e dell'ipotesi seconda moltiplicata per l'errore primo, è uguale al prodotto della grandezza richiesta moltiplicata per la somma degli errori; e perciò la grandezza richiesta è il quoto della somma degli espressati prodotti, divisa per la somma degli errori.

369. Sicchè si può avere la grandezza richiesta ne' problemi, che si risolvono colla regola doppia del falso, col moltiplicare l'ipotesi prima per l'er-

l' errore secondo, e l' ipotesi seconda per l' errore primo; ed indi dividere, se gli errori sono simili, la differenza de' prodotti per la differenza degli errori; e se dissimili, la somma de' prodotti per la somma degli errori. Infatti comunemente gli Aritmetici così risolvono i problemi dell' espressata Regola.

370. Si supponga esser solamente noto, che due distaccamenti nemici sono tali, che aggiunti al primo 274 Uomini, esso divenga doppio del secondo, e che il secondo divenga triplo del primo, se li 274 Uomini se gli aggiungano: e si voglia sapere qual numero d' Uomini compongono ciascheduno d' essi distaccamenti.

Suppongasi, che il primo distaccamento sia di 600 Uomini: ne sarà il secondo di 437, quoto della somma di 600, e 274, divisa per 2: ma il triplo di 600 è maggiore della somma di 437, e 274, per 1089. Dunque di 1089 l' ipotesi 600 eccede l' espressate condizioni. Si supponga, che il primo distaccamento sia di 400 Uomini: ne sarà il secondo di 337, quoto della somma di 400, e 274, divisa per 2: ma il triplo di 400 è maggiore della somma di 337, e 274 per 589. Dunque di 589 l' ipotesi 400 eccede l' espressate condizioni. Perlocchè essendo simili gli errori 1089, e 589; se da 435600, prodotto di 1089 moltiplicato per 400, se ne sottragga 353400, prodotto di 589 moltiplicato per 600, ed il residuo 82200 si divida per 500, differenza degli errori 1089, e 589; sarà il quoto $164\frac{2}{5}$ il numero degli Uomini, che compongono il primo distaccamento (368). Infatti essendo il primo distaccamento di 164 Uomini, e $\frac{2}{5}$; ne sarà il secondo di 219, e $\frac{1}{5}$, quoto della somma di $164\frac{2}{5}$, e 274 divisa per 2: ma il triplo di $164\frac{2}{5}$ è uguale alla somma di $219\frac{1}{5}$, e 274. Dunque $164\frac{2}{5}$, è il numero degli Uomini, che compongono il primo distaccamento.

371. Si supponga essere solamente noto, che due distaccamenti nemici sono tali, che se dal primo

se

ſe ne tolgano due ſettimi, e dal ſecondo quattro noni, e della ſomma di queſte parti ſe ne aggiunga un terzo al primo, e due terzi al ſecondo; ſia ciaſcheduno di eſſi di 782 Uomini: e ſi voglia ſapere qual numero d'Uomini compongono ciaſcheduno degli eſpreſſati diſtaccamenti.

Suppongaſi, che il primo diſtaccamento ſia di 700 Uomini; ne ſarà il ſecondo di 864, compimento di 700 a 1564, ch'è il doppio di 782: ma i due ſettimi di 700 ſono 200, e i quattro noni di 864 ſono 384, di cui il terzo della ſomma è 194 $\frac{2}{3}$, che aggiunto a 500, reſiduo che ſi ha togliendo da 700 i due ſettimi, fa 694 $\frac{2}{3}$, minore di 782 per 87 $\frac{1}{3}$. Dunque di 87 $\frac{1}{3}$ l'ipoteſi 700 manca dall'eſpreſſate condizioni. Si ſupponga, che il primo diſtaccamento ſia di 728 Uomini; ne ſarà il ſecondo di 836, compimento di 728 a 1564, che è il doppio di 782: ma i due ſettimi di 728 ſono 208, e i quattro noni di 836 ſono 371 $\frac{5}{9}$, di cui il terzo della ſomma è 193 $\frac{5}{27}$, che aggiunto a 520, reſiduo che ſi ha togliendo da 728 i due ſettimi, fa 713 $\frac{5}{27}$, minore di 782 per 68 $\frac{22}{27}$. Dunque di 68 $\frac{22}{27}$ l'ipoteſi 728 manca dall'eſpreſſate condizioni. Perlocchè eſſendo ſimili gli errori 87 $\frac{1}{3}$, e 68 $\frac{22}{27}$; ſe 48170 $\frac{10}{27}$, prodotto di 700 moltiplicato per 68 $\frac{22}{27}$, ſi ſottragga da 63578 $\frac{2}{3}$, prodotto di 728 moltiplicato per 87 $\frac{1}{3}$; ed il reſiduo 15408 $\frac{8}{27}$, ſi divida per 18 $\frac{14}{27}$, differenza degli errori 87 $\frac{1}{3}$, e 68 $\frac{22}{27}$, ſarà il quoto 832, e $\frac{648}{13500}$, ovvero $\frac{6}{125}$, il numero degli Uomini che compongono il primo diſtaccamento (368). Infatti eſſendo il primo diſtaccamento di 832 Uomini, e $\frac{6}{125}$; ne ſarà il ſecondo di 731 $\frac{119}{125}$, compimento di 832 $\frac{6}{125}$ a 1564,

che

ch' è il doppio di 782: ma i due settimi di 832 $\frac{6}{125}$ sono 237 $\frac{637}{875}$, e i quattro noni di 731 $\frac{119}{125}$ sono 325 $\frac{351}{1125}$, di cui il terzo della somma è 187 $\frac{2008125}{2953125}$, che aggiunto a 594 $\frac{280}{875}$, residuo che si ha togliendo da 832 $\frac{6}{125}$ i due settimi, fa 782. Dunque 832 $\frac{6}{125}$ è il numero degli Uomini, che compongono il primo distaccamento.

372. Finalmente si supponga esser solamente noto, che in un distaccamento vi sono 1800 Soldati di Fanterìa, e tanti di Cavallerìa, e Truppa leggiera: che quei di Cavallerìa con un terzo della Truppa leggiera, sono la metà della Fanterìa, e due noni della medesima Fanterìa sono eguali a quei della Truppa leggiera con un quinto della Cavallerìa: e si voglia sapere qual numero di Cavallerìa, e Truppa leggiera sia in esso distaccamento.

Suppongasi, che la Cavallerìa sia di 700 Uomini; ne sarà la Truppa leggiera di 600, di cui il terzo con 700 fa 900, metà della Fanterìa: ma 400, ch' è li due noni della Fanterìa, è minore di 740, ch' è la somma della Truppa leggiera, e di un quinto della Cavallerìa, di 340. Dunque di 340 l' ipotesi 700 manca dall' espressate condizioni. Si supponga, che la Cavallerìa sia di 860 Uomini; ne sarà la Truppa leggiera di 120, di cui il terzo con 860 fa 900, metà della Fanterìa: ma 400, ch' è li due noni della Fanterìa, è maggiore di 292, che è la somma della Truppa leggiera, e di un quinto della Cavallerìa, di 108. Dunque di 108 l' ipotesi 860 eccede l' espressate condizioni. Perlocchè essendo dissimili gli errori 340, e 108; se 75600, prodotto di 700 moltiplicato per 108, si aggiunga 292400, prodotto di 860 moltiplicato per 340; e la somma 368000 si divida per 448, somma degli errori 340, e 108; sarà il quoto 821, e $\frac{192}{448}$, ovvero $\frac{3}{7}$, il numero degli Uomini di Cavallerìa, che sono nel distaccamento (368). Infatti essendo la Cavallerìa di 821 Uomini, e $\frac{3}{7}$; ne sarà

la

Truppa leggiera di 235 $\frac{5}{7}$, di cui il terzo con 821 $\frac{3}{7}$ fa 900, metà della Fanterìa: ma 400, ch' è li due noni della Fanterìa, è uguale alla Truppa leggiera con un quinto della Cavallerìa. Dunque nell' eſpreſſato diſtaccamento vi devono eſſere 821 Uomini, e $\frac{3}{7}$ di Cavallerìa, e 235 $\frac{5}{7}$ di Truppa leggiera.

373. Egli è d' avvertirſi, che per rendere più ſemplici le ſoluzioni de' problemi, che dipendono dalle regole del Falſo, giova prendere per le ipoteſi i minori numeri poſſibili, che ſieno tra ſe meno differenti; e che operando intorno ad eſſi nell' attribuirli le condizioni della grandezza richieſta, ſi abbia il minor numero poſſibile di frazioni. E d' avvertirſi ancora, che nel determinar gli errori, ſi deve ſcegliere quella delle due grandezze, di cui eſſi ſono la differenza: alla quale comparata l' altra in ambe le ipoteſi, degli errori per difetto ſia maggiore quello, che deriva dall' ipoteſi minore; di quei per eccesſo ſia maggiore quello, che deriva dall' ipoteſi maggiore: ed eſſendo uno per eccesſo, e l' altro per difetto, ſia per eccesſo quello che deriva dall' ipoteſi maggiore, e per difetto quello che deriva dall' ipoteſi minore: locchè non potendo in niun modo avvenire, ſarà ſegno, che il problema non ſia ſolubile con queſta regola; come non lo è neppure quando da due ipoteſi ne derivano più di due errori. E finalmente ſi deve avvertire, che tutti i problemi, che ſi riſolvono colla Regola ſemplice del falſo, ſi poſſono anche riſolvere colla doppia, ma quei, che ſi riſolvono colla doppia, non ſi poſſono riſolvere colla ſemplice. Quindi è, che la Regola doppia del falſo è molto più generale della ſemplice. Si deve non per tanto far uſo della ſemplice ſempre che ſia poſſibile; poichè con eſſa ſi hanno ſoluzioni più facili; e la doppia non ſi deve impiegare, ſe non che per quei problemi, le di cui ſoluzioni non ſi poſſono altrimente ottenere.



F I N E.